テキスト３

絵とともに学ぶ中学数学

空間図形，確率・統計

おとといのジョー　著

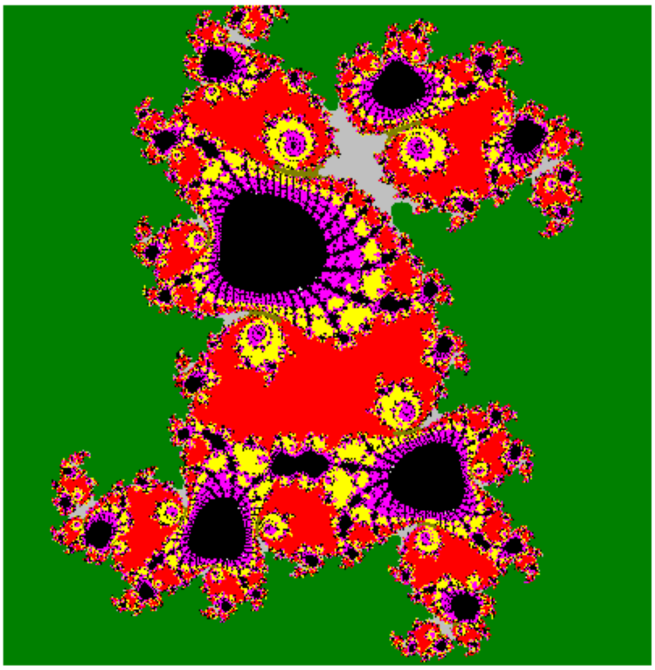
はじめに

図やグラフ (絵) を描きながら数学を学びましょう。きれいな絵がかけると，答えが簡単にわかることがありますよね。問題を解くための美しいきれいな絵を描いてみましょう。このテキストは，絵をふんだんにとりいれて書いてみました。読者の皆さんも，このテキストよりももっときれいな絵を描いて問題を解いて見て下さい。

数式でも，単純できれいな式に出会うことがありますよね。自分でみちびいた式がきれいな格好になった時などうれしくなりますよね。そんな数学の問題に出会えるといいですね。

数学の問題を解く道すじはたくさんあります。式の変形だけで解けるものもあるし，図形だけで解けることもあるし，両方必要になるときもあるでしょう。答えに至る道も１つではなく，いっぱいあります。そのうちの１つをあなた自身の考えで発見して下さい。

Let ’s play mathematics !



4 次多項式（複素数関数）によるジュリア集合

もくじ

第 1 章　空間図形

我々の住んでる地球や宇宙は 3 次元の空間（たて・よこ・高さがある空間）で，いろいろな物体・立体があります。家，木，山，箱，マフラー，ボール，飛行機などいろいろな物がありますが，人間が作った人工物は単純な立体の組み合わせからなるものが多いよね。中学の数学で扱う空間図形は，体積や表面積などが計算できるような単純な立体を取り上げます。

空間内の平面を図に表すときは，平行四辺形を使いますが，平面はどちらの方向にも無限に伸びていると考えて下さい。即ち大きさが限定された平面ではないということです。平面は，P,Q,R などの大文字で表します。

立体を表現するとき，かくれ線を描くとわかりやすいよね。教科書などではかくれ線は点線で表されていますが，このテキストでは，やや薄いカラーの線（うす緑，うす茶など）で描きますのでよろしく。

§ 1.1　直線や平面の位置関係

♠★ 空間内の 2 本の直線 l, m は，下の図のように，交わる，平行，ねじれの位置（交わらない）のいずれかの関係にあります。「交わる」と「平行」の場合は，2 直線 l, m は 1 つの平面上にあることがわかります。

(例）交差してしている 2 本の道路は，地上という平面上で交わっている 2 本の帯と考えていいよね。また，2 つの電柱の間にピンと張られた 2 本の電線は，空間内の平行線と考えられます。

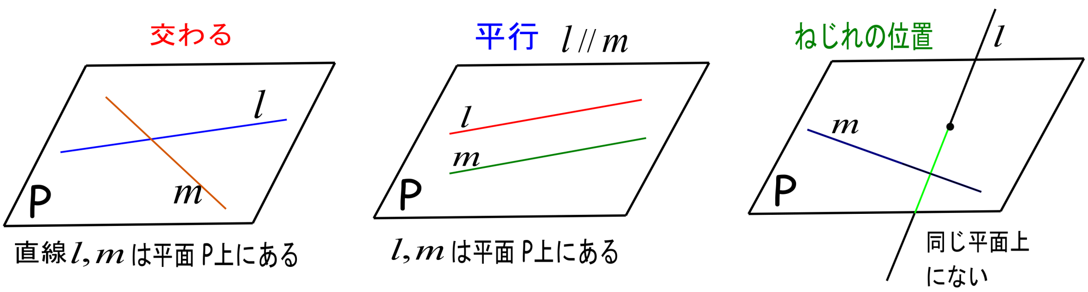


図1.1　空間の中の2直線

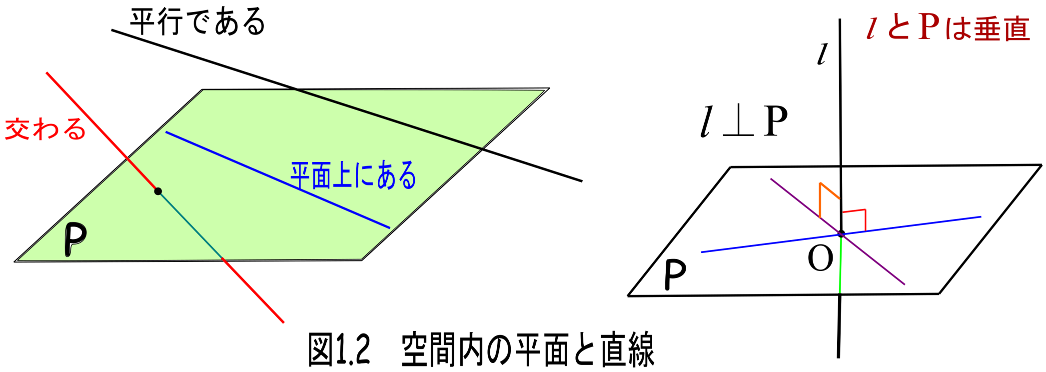


図1.2　空間内の平面と直線

★ 空間内の直線 l と平面 P の関係は,「直線は平面 P 上にある」,「直線と平面 P は交わる」または「直線と平面 P は平行である」（直線と平面は共有点をもたない）のいずれかです（図 1.2，左）。また，直線 l と平面 P の交点が O のとき，O を通る P 上のすべての直線と l が垂直のとき「直線 l と平面 P は垂直である」といい，$l \perp$P とかきます（図 1.2，右）。実際には，平面上の 2 本の直線と l が垂直ならば，$l \perp$P だよ。（なぜかな？，考えて!，むつかしいかもね）

（例）スカイツリーは高さ 634m で，地上という平面（地平面）と垂直と考えられます。今，地平面のある点 A からタワーの頂上までの直線距離がちょうど 1km のとき，タワーから点 A まで

の地上の距離は，何メートルでしょう。
（解答）求める距離を x とする。A を 1 つの頂点，タワーを一辺とした直角三角形で，三平方の定理を使うと　$x^2 + 634^2 = 1000^2$　より，$x^2 = 1000^2 - 634^2 = 1634 \times 366 = 598044.$
これの正の平方根は，電卓を使って，$x = \sqrt{598044} = 773.3(\mathrm{m})$ $\cdots$ （答え）

★ 2 つの平面は，交わるか平行のどちらかです（図 1.3 参照）。2 つの平面の交わりは直線で，それを交線と呼びます。図のように交線上の 1 点 O に対して，交線と垂直になる線分 AO,BO（A,B はそれぞれ平面 Q,P 上の点）を引いたとき，$\angle$AOB を平面 P と Q のつくる角という。$180^o - \angle$AOB も平面 P と Q のつくる角です。$\angle$AOB$= 90^o$ のとき，平面 P と平面 Q は垂直であるといいます。

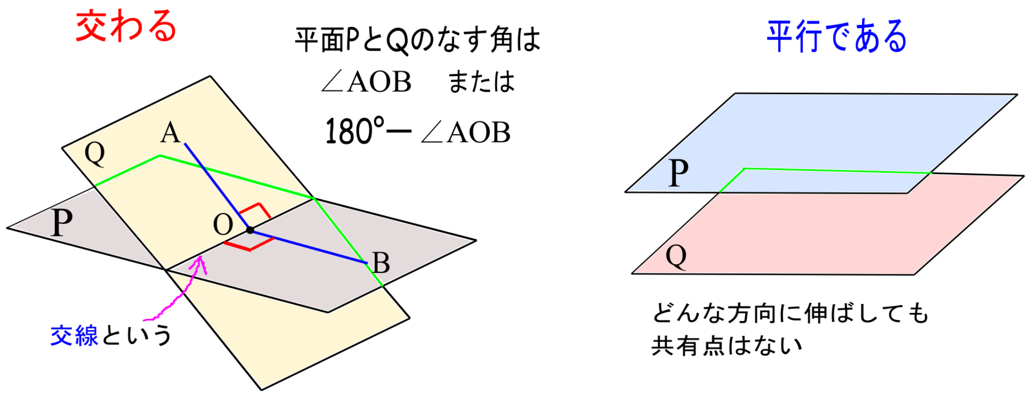
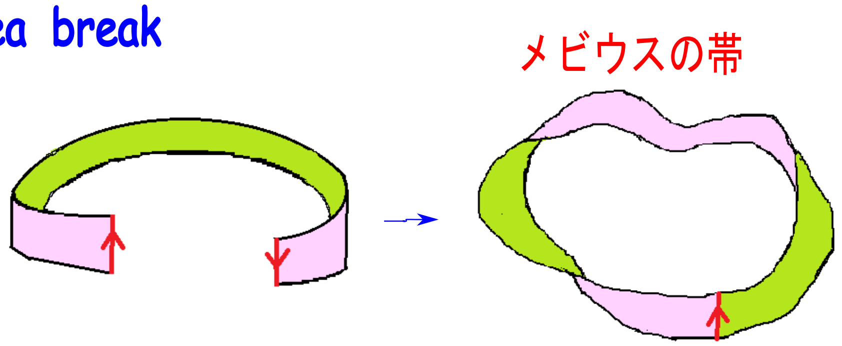


図1.3　平面と平面

（例）エジプトの 1 番大きなピラミッド（クフ王の墓）は，正四角錐（次節参照）で地上面と側面のなす角は約 52^o です。地上を x 軸と考えたとき，側面が作る直線の傾きは約 $\frac{14}{11}$ だそうです。側面はけっこう急斜面ですね。あなたの家の近くの公園にある滑り台の斜面と地上面の角度はどのくらいでしょう。暇のとき測ってみて。ピラミッドの側面の傾斜とどちらが急でしょうか。♠

Tea break



左の帯を半回転ひねり，赤の矢印が重なるように貼り付ける。表も裏もないメビウスの帯ができる。

Möbius　1790-1868，ドイツ

§ 1.2　いろいろな立体

空間図形の中で，四角柱や円柱，球，ドーナツなどのように面で囲まれているものを立体または立体図形といいます。平面だけで囲まれた立体は，多面体と呼ばれます。立体を空間内の 1 点からながめて描いた図を見取図（みとりず）といいます。3 次元の物体を平面上に表現するので，なかなか難しいね。しかし，上手く描けると嬉しいよね。

♠★ 最初に，よく見る立体：三角柱，四角柱，円柱 and 三角錐，四角錐，円錐 の見取図を示す。

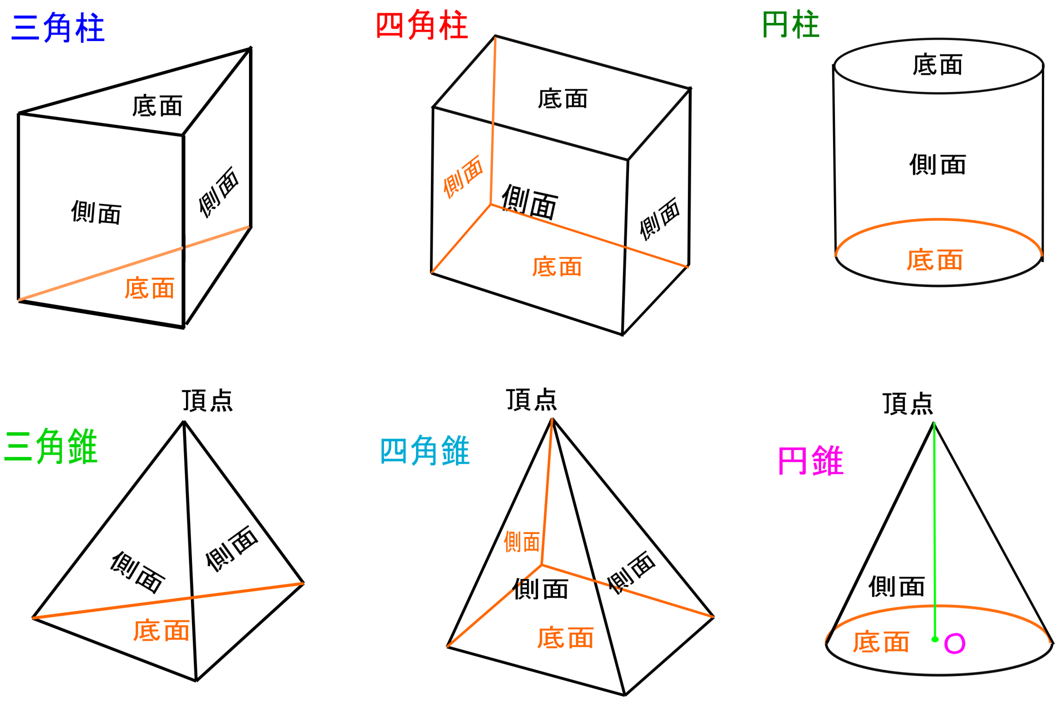


図1.4　よく見る立体の見取図

上段の角柱（かくちゅうと読む。三角柱，四角柱，五角柱など）や円柱では，下の面と上の面は共に底面と呼ばれます。底面と底面を結ぶ側面や辺（円柱の場合，見取り図の左右の線分と考えよ）は，両方の底面に垂直である。即ち，ピサの斜塔のように傾いてはいない。n 角柱の側面はすべて長方形で n 個あります。円柱の側面は 1 枚の曲面です。

四角柱は，直方体と言ってもよい。直方体の 6 つの面が正方形のとき，立方体（正六面体ともいう）と呼ばれる。

下段の，三角錐や四角錐などは角錐（かくすい）と呼ばれます。角錐は，頂点と呼ばれる上端がとがっている多面体で，側面は底面の辺を一辺とする三角形からなる。角錐の頂点は底面より上にあれば，どこにあってもかまいません。

円錐はメガホンの形に似た，上端（頂点）がとがっている立体で，側面は一枚の曲面です。円錐の頂点から底面に下した垂線は，底面の円の中心 O を通ります（角錐の定義と違うので注意）。

★ 底面が正三角形，正方形，⋯　で，側面がすべて合同な長方形である角柱を，それぞれ正三角柱，正四角柱，⋯　という。また，底面が正三角形，正方形，⋯　で，側面がすべて合同な二等辺三角形である角錐を，それぞれ正三角錐，正四角錐，⋯　という。

(例)・サイコロは，立方体から作ることができます。

・サンドイッチは三角柱 or 四角柱が多いね，サバの缶詰は円柱，メトロノームはほぼ正四角錐ですかね。

・工事現場などの境界には，円錐形をした赤色のとんがりコーンのような物体が，注意かんきの

ためたくさん置かれていますね。正式には，セーフティコーンとかカラーコーンとか言います。
・バスケットボールやテニスボールはほぼ球ですよね。しかし，ラグビーボールは楕円形のような立体ですが，呼び名は何でしょうか？切り方によって切り口は，楕円になったり，円になったりしますね。 ♠

三角錐で，すべての面が正三角形のものは，正四面体（せいしめんたい）と呼ばれ，すべての面が正方形の立方体は正六面体と呼ばれます。このような図形を正多面体と呼びますが，何種類位あるんだろうか，気になりますよね。

♠★ 多面体で次の 2 つの性質をもち，へこみのないものを正多面体という。

(1)　どの面もすべて合同な正多角形である。

(2)　どの頂点にも面が同じ数だけ集まっている。

性質 (2) はけっこう難しい条件ですね。簡単に想像できないね。しかし，次の 5 種類しかないことがわかっています。

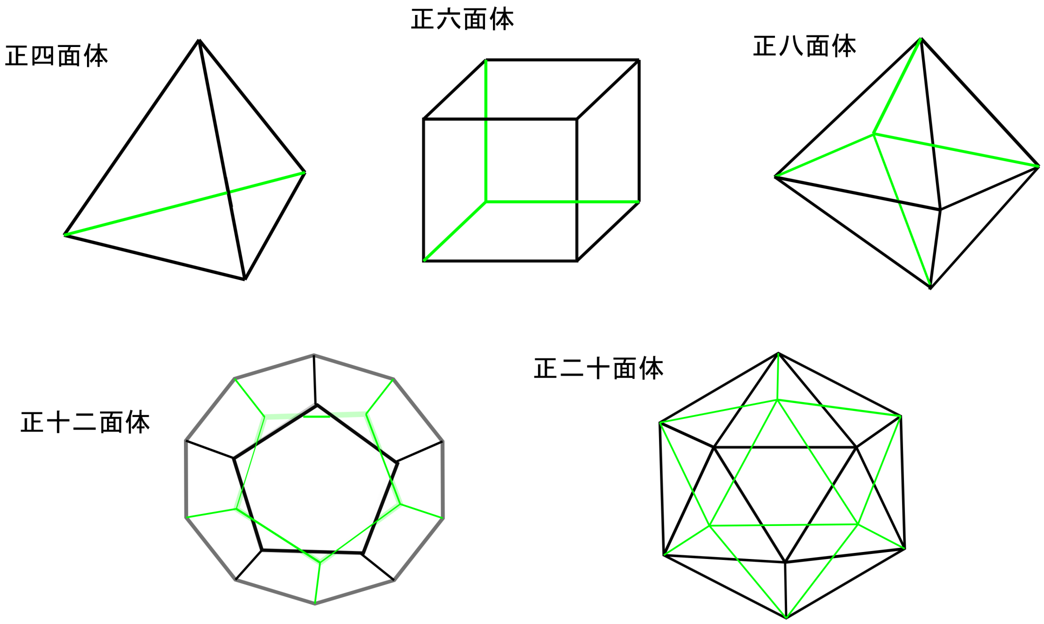


図1.5　正多面体

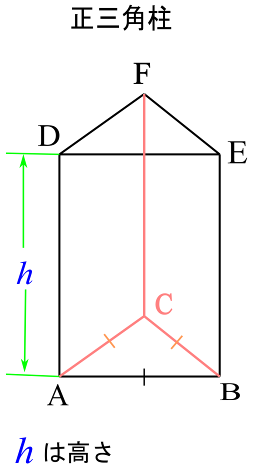
(例）正八面体や正十二面体にカットされた宝石などは，宝石店のショーウインドウでときどき見ることがあるよね。自分のものになることはほとんどないと思いますが… ♠

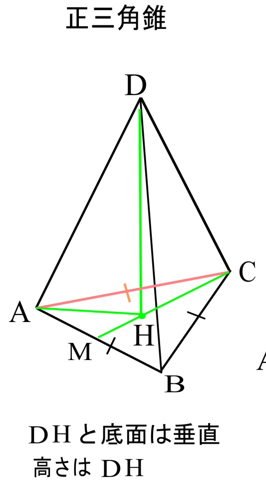
（例題１）次ページに，正三角柱，正三角錐，正四角錐，正六角柱の見取図を示した。角柱の高さとは，上下の底面間を結ぶ垂直な辺の長さである。また，角錐の高さとは，頂点から底面に下した垂線の長さである。図を参考にしてください。

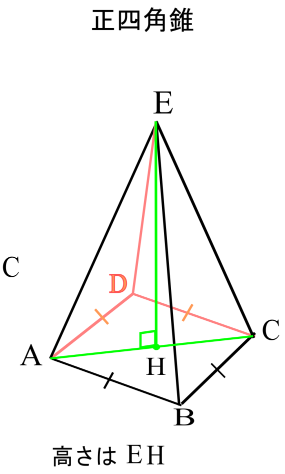
１つの多面体の表面積とは，その多面体のすべての面の面積の和である。以上のことをふまえて，以下の問に答えよ。

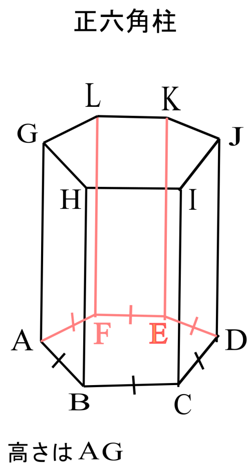
(1) 正三角柱の底面の正三角形の 1 辺の長さが 3cm，高さが 5cm のとき，この正三角柱の表面積を求めよ。また，正六角柱の底面の正六角形の 1 辺の長さが 2cm，高さが 5cm のとき，この正六角柱の表面積を求めよ。

(2)　正三角錐において，AB=3cm，AD=5cm のとき，この三角錐の高さを求めよ。
また，正四角錐において，AB=4cm，AE=6cm のとき，この四角錐の高さを求めよ。









解答）(1) 底面の一辺が 3cm（以下，単位は略）の正三角形の面積は，底辺が 3，高さが $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ だから $\frac{1}{2}\times 3\times\frac{3}{2}\sqrt{3}=\frac{9}{4}\sqrt{3}$. 側面の長方形の面積は 15，したがって，表面積 S は

$$S=2\times\frac{9}{4}\sqrt{3}\ +\ 3\times 15=\frac{9}{2}(10+\sqrt{3})\ (\mathrm{cm}^2).$$

正六角柱の底面の面積は $6\sqrt{3}$，側面の長方形は 10. したがって，表面積 S は

$$S=2\times 6\sqrt{3}+6\times 10=12(5+\sqrt{3})\ (\mathrm{cm}^2).$$

(2) 正三角錐の底面は，一辺が 3cm の正三角形だから，△ABH は $\angle$A= $\angle$B= 30° の二等辺三角形。したがって，△HAM は $\angle$A= 30°，$\angle$H= 60° の直角三角形（上の図参照せよ）。AM= $\frac{3}{2}$ より，AH= $\sqrt{3}$ がわかる。△DAH で，x =DH（求める高さ）とおいて三平方の定理を使うと

$$(\sqrt{3})^2+x^2=5^2\quad\to\quad x^2=25-3=22,\qquad\therefore\ x=\sqrt{22}\ (\mathrm{cm})\quad\cdots\text{（答え）。}$$

正四角錐の底面の正方形は，一辺の長さが 4 だから，AC= $4\sqrt{2}$，したがって AH= $2\sqrt{2}$. x =EH とおいて，△EAH に三平方の定理を使うと，

$$(2\sqrt{2})^2+x^2=6^2,\qquad x^2=28\qquad\therefore x=2\sqrt{7}\ (\mathrm{cm})\ \cdots\quad\text{（答え）。}$$

♡

（例題２）いくつかの多面体について，頂点，面，辺の数を調べたのが次の表である。

表1.　多面体の性質

	三角錐	五角柱	正五角錐	六角柱	正六面体	正十二面体
底面の形	三角形	五角形	正五角形	六角形	全ての面が同じ 正方形	全ての面が同じ 正五角形
側面の形	三角形	長方形	2等辺三角形	長方形		
頂点の数 V	4	10	6	12	8	20
面の数 f	4	7	6	8	6	12
辺の数 e	6	15	10	18	12	30

頂点 vertex　　面 face　　辺 edge

上の表をじっくりながめていると，頂点の数を v，面の数を f，辺の数を e としたとき，$v+f-e=2$ となっていることがわかりますね。不思議ですね。びっくりです。この結果は，

全ての凸 (とつ) 多面体（へこんでいる部分がない多面体，すなわち全ての頂点は多面体の外部に出っぱっている）に対して成り立つことがわかっています。スイスの数学者オイラーが 1752 年に発見しました。すごいですね。

定理 1 （オイラーの定理）
凸多面体の頂点，面，辺の数をそれぞれ v, f, e とするとき，$v+f-e=2$ が成り立つ。

（例）四角錐では，頂点の数は 5，面の数は 5，辺の数は 8 なので，オイラーの定理は成り立っています。 ♡

問 1． (1) 辺の長さ 1 の正四面体の 1 つの面の面積を求めよ。また，この正四面体の高さを求めよ。
(2) 辺の長さ 1 の正八面体 ABCDEF（A は上の頂点，F は下の頂点，BCDE は中央の正方形；図 1.5，または解答の図参照）において，△AEC はどんな三角形か答えよ。また，2 頂点間の距離で 1 番長いものはいくつか。

§ 1.3 展開図と投影図

♠★ 立体図形の辺や円周にハサミをいれて平面上に切り開いた図形を，展開図と呼びます。立体の性質・構造を調べたり，表面積を計算するときなどに利用されます。下の図は，正四角錐と円錐の展開図です。よくながめて，他の立体の展開図を作る際の参考にして下さい。
展開図は，一通りではありません。かく人によって違いが出てきます。おもしろい展開図がかけるといいですね。

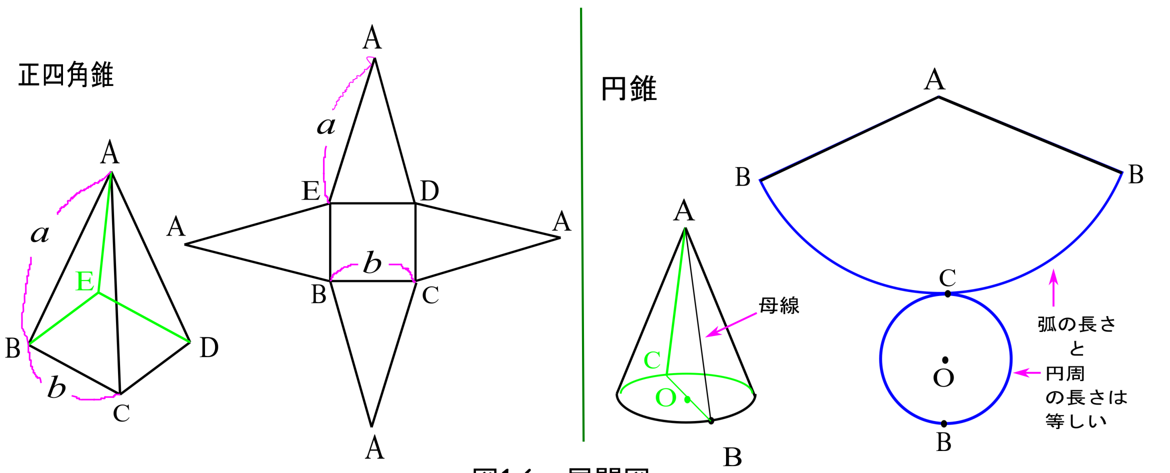


図1.6　展開図

(例) 上図右の円錐で，底面の円 O の半径が 2cm，母線の長さが 6cm のとき，この円錐の表面積を求めよ。
（解答） 円 O の周の長さは 4π，面積も 4π である。AB を半径とする円の周の長さは 12π，おうぎ形の弧の長さは 4π だから（円の 3 分の 1 ），おうぎ形の中心角は，120°。おうぎ形の面積は 12π。よって，円錐の表面積は $4\pi+12\pi=16\pi$（cm^2）。

★ 立体図形を宙に浮かして固定し，真正面から光をあて，後ろの垂直な壁にできる影をかたどった図を立面図とよぶ。かくれた辺も点線やカラー線などでかくと，立体の構造がよくわかります。また，真上から見た図形を，真下の床の上にかいた図を平面図とよびます。やはり，かくれ線も点線やカラー線などでかきましょう。立面図と平面図を並べてかいた図を投影図とよびます（下図参照）。投影図があると，見取図では表せなかった部分を表現できることがあります。すなわち，立体図形をより正確に認知することができます。

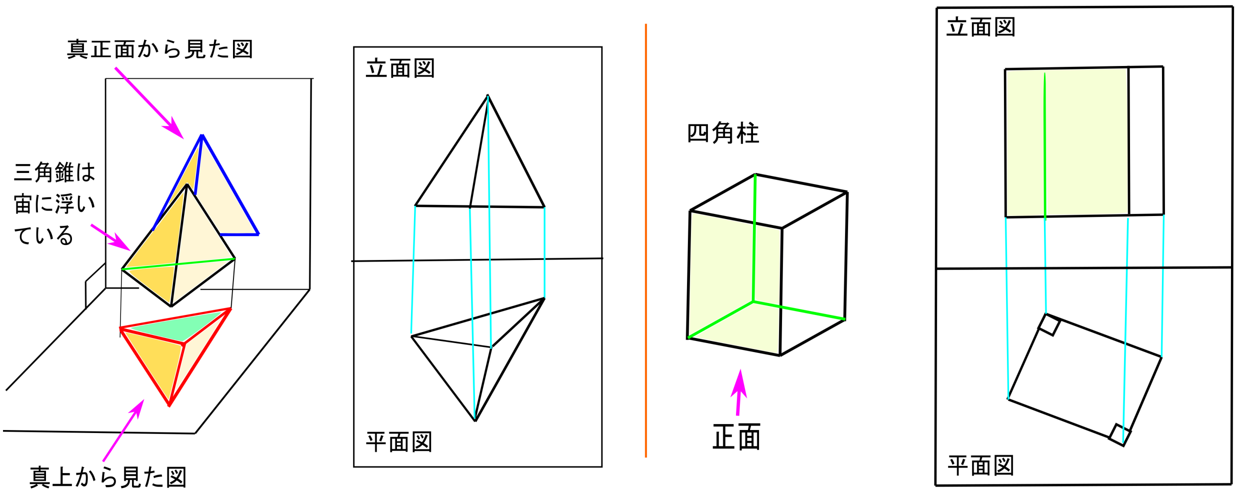
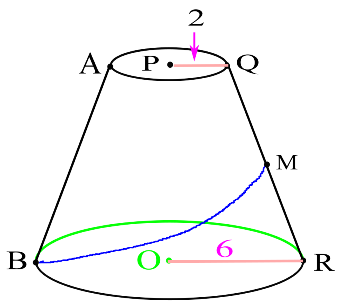


図1.7　投影図

投影図は，立体図形を宙に浮かせた状態でかくのですが，実際にはそんなことできませんよね。だから，床の上（or　机の上）に置いて，ゆっくりかいて下さい。上の図では，かくれた辺はうす緑でかいてあります。また，対応する点や辺にはそら色の線が引いてあります。 ♠

（例題３）右の図は円錐の上の部分をちょん切って，まるい台を作ったものです。上部の円板と底面の円板は平行です。線分 AQ,BR はそれぞれの円の直径です。上部の円 P の半径は 2m，底面の円 O の半径は 6m です。また，母線 AB の長さは 8m である。



例題3　　まるい台

(1) 切り取った上部の円錐の母線の長さを求めよ。
(2) この立体の展開図をかき，表面積を求めよ。
(3) 線分 QR の中点を M とする。点 M と点 B を結ぶ側面上の曲線のうち，その長さが最も短いものの長さを求めよ。
(4) この立体の投影図をかけ。

解答）(1) 母線の長さを x とすると，x は下図 (1) の VA の長さである。この直角三角形で　$x : (x+8) = 2 : 6$　だから，
　$6x = 2(x+8)$　　$\therefore$　$x = 4$ (m)。

(2) 展開図は下の図 (2) である。
　円 P の面積　　　4π，
　図形 QABRBAQ（ドーナツの半分）の面積：
　　　　　　$144\pi \div 2 - 8\pi = 64\pi$，
　円 O の面積　　36π.　以上合計して　104π (m^2)　$\cdots$（答え）。

(3) 点 M と点 B を結ぶ曲線で一番短いものは，展開図の直線 MB（うす緑色の線）である。この長さを y とおくと 直角三角形 ABM に三平方の定理を使って
$$y^2 = 8^2 + 12^2 \text{　だから，　} y^2 = 208 \quad \therefore \quad y = 4\sqrt{13} = 14.42 \text{ (m)} \cdots \text{(答え)。}$$

(4) 下の図 (3) が答え。 ♡

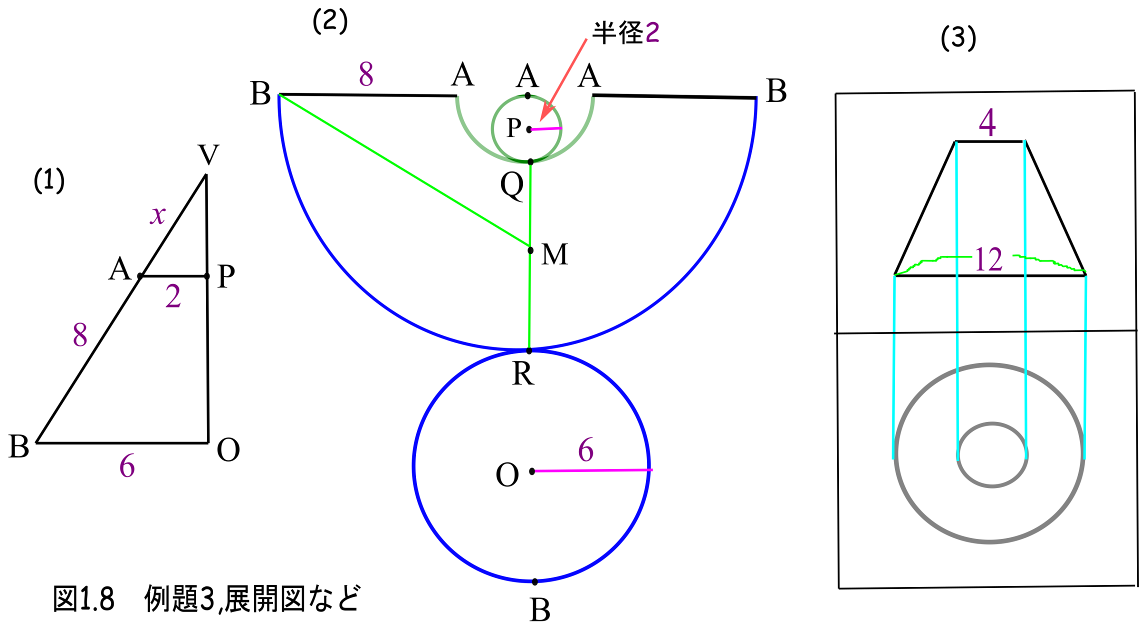
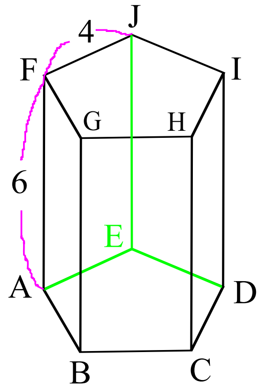


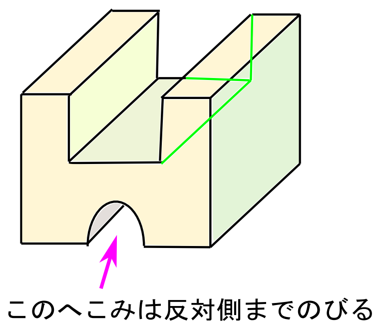
図1.8　例題3,展開図など

問２．　下図，左の多面体は正五角柱で，FG=4cm，FA=6cm である。以下の問に答えよ。
(1) 辺 AF とねじれの位置にある辺を全て求めよ。
(2) 辺 FG と平行な辺を全て求めよ。
(3) 底面 ABCDE と平行な辺を全て求めよ。
(4) 平面 BCHG と垂直な平面を全て求めよ。また，平面 BCHG と平面 CDIH のなす角を求めよ。
(5) この正五角柱の展開図をかけ（答えは一通りではありません）。

正五角柱



機械部品



問３．上の図，右の立体図形はある機械の部品である。この立体の投影図をかけ。

§ 1.4　立体図形の体積

♠★ 角柱や円柱などの体積 V は，底面の面積を S，高さを h とすると

$$V = S \times h \qquad \cdots \quad ①$$

であった（これは，小学校で習ったことです）。V の単位は cm^3, m^3 などです。例えば，下のような空間図形は，底面積と高さが分かれば計算できます。 ♠

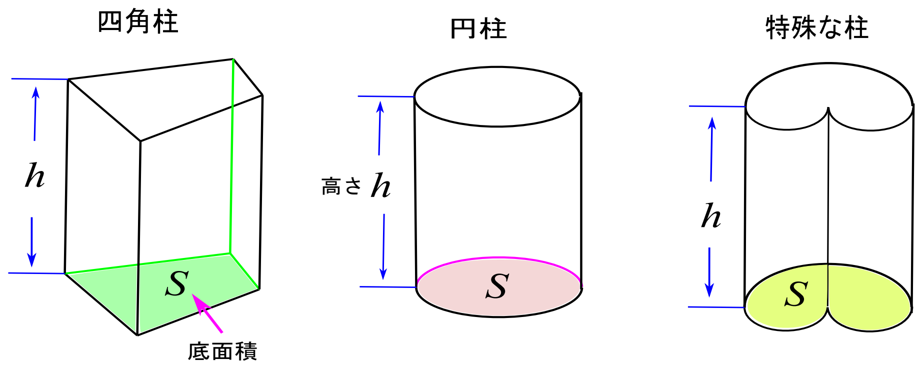


図1.9　角柱,円柱などの体積

（例題４） 上図，右の特殊な柱の底面が，直径 4cm の 2 つの半円と直径 8cm の 1 つの半円からできているとする。また，高さは 10cm である。この立体の体積を求めよ。

解答）底面積は　$2^2\pi + \dfrac{1}{2} \times 4^2\pi = 12\pi\ (\mathrm{cm}^2)$，高さは 10cm　だから，体積は

$$V = 12\pi \times 10 = 120\pi\ (\mathrm{cm}^3).$$ ♡

（例題５） 1 辺が 10cm の立方体（正六面体）ABCDEFGH を考えよう（下の図参照）。4 本の対角線 AG, BH, CE, DF の交点を M とすると，この正六面体は，同じ大きさの 6 つの正四角錐 ABCDM, EFGHM, BCGFM, ADHEM, ABFEM, DCGHM に分割される。図のまん中の正四角錐が ABCDM である。この正四角錐と同じ高さの四角柱が右の図（元の正六面体の下半分）である。以下の問に答えよ。

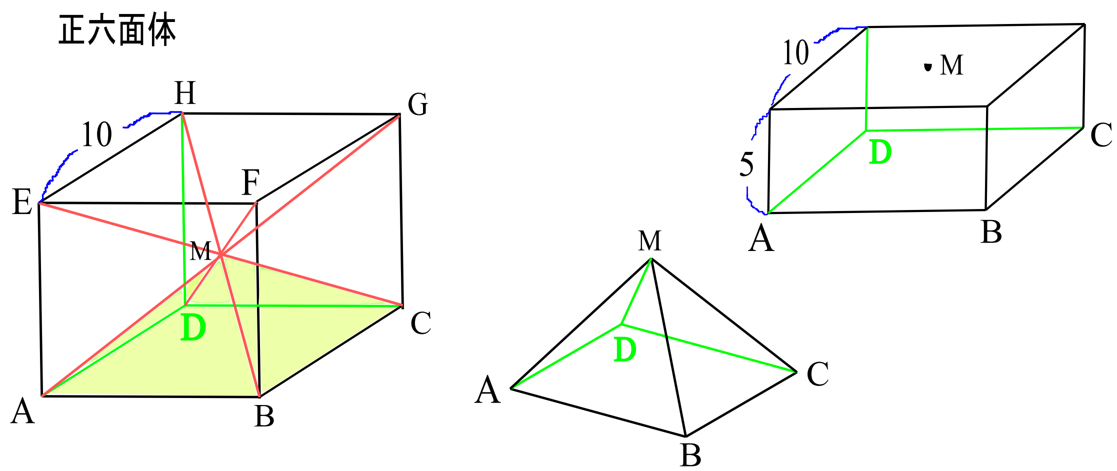


図1.10　6つの四角錐

(1) 正四角錐 ABCDM の体積 V を求めよ。

(2) 正六面体の半分の正四角柱（上の図の右のもの）の体積は，正四角錐 ABCDM の体積の何倍か答えよ。

解答）(1) 正六面体の体積は　$10^3 = 1000\ (\mathrm{cm}^3)$, これの 6 分の 1 が正四角錐 ABCDM の体積

だから，　$V = 1000 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{500}{3}\ (\mathrm{cm}^3).$

(2) 正六面体の半分の正四角柱の体積は　500cm^3　だから，これは正四角錐 ABCDM の体積の 3 倍である。. ♡

　例題 5 では，四角柱と同じ高さをもつ四角錐の体積は，四角柱の体積の 3 分の 1 であることを見た。この結果は一般の角柱と角錐，また，円柱と円錐の間にも成り立つことであろうか？この問に答えるには，中学の数学ではまにあいません。読者の皆さんも，高校で習う微分積分学（びせきぶんがく）まで待たなければなりません。

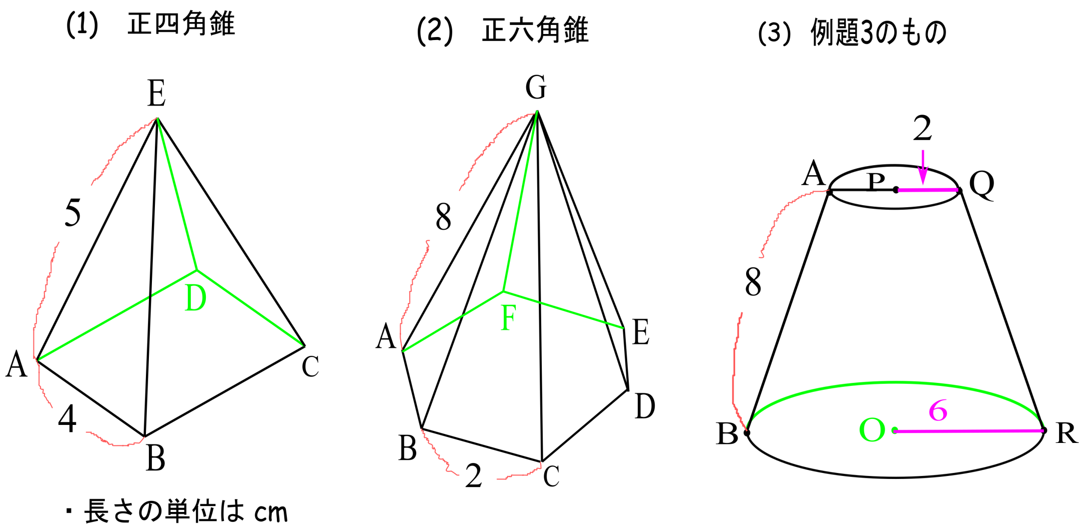
　しかしながら，我々は，四角柱や四角錐はその展開図から作ることができます。円柱や円錐も同様です。したがって，底面と高さが同じ角柱と角錐（円柱と円錐でも可）を作って，水または粉などを使って，角錐の体積の何倍が角柱の体積かを調べることができます。教科書でもこのような実験は扱っています。読者の皆さんも，角柱の体積の 3 分の 1 が角錐の体積であるという事実を実験などを通じて知っていることと思います。

♠★ 底面積が S，高さが h の角錐または円錐の体積 V は

$$V = \frac{1}{3}Sh \quad \cdots \quad ②$$

である。V の単位は cm^3, m^3 などです。 ♠

（例題６）下の図の正四角錐，正六角錐および例題 3 で扱った丸い台の体積を求めよ。辺の長さの単位は cm である。



解答）(1) 底面の正方形の対角線 AC の長さは　$4\sqrt{2}$,　この対角線の中点 M に頂点 E から下した垂線の長さが高さ h になる。直角三角形 EAM に三平方の定理を使うと，

$$(2\sqrt{2})^2 + h^2 = 5^2 \quad \rightarrow \quad h^2 = 17 \quad \therefore \quad h = \sqrt{17}.$$

よって体積は　$V = \frac{1}{3} \times 16 \times \sqrt{17} = \frac{16}{3}\sqrt{17}\ (\text{cm}^3)$.

(2) 一辺の長さが 2 の正六角形の面積は，辺の長さが 2 の正三角形が六つ集まったものなので，

$$6 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3}\right) = 6\sqrt{3}.$$

また，この正六角錐の高さは　$h^2 + 2^2 = 8^2$　より，$h = 2\sqrt{15}$.　したがって，体積は

$$V = \frac{1}{3} \times 6\sqrt{3} \times 2\sqrt{15} = 12\sqrt{5}\ (\text{cm}^3).$$

(3) 例題 3 の解答の図 (1) を参考にして，カットする前の円錐の体積からカットした円錐の体積を引けなよい。VO $= 6\sqrt{3}$,　VP$= 2\sqrt{3}$　より，まるい台の体積は

$$V=\frac{1}{3}\times 36\pi\times 6\sqrt{3}-\frac{1}{3}\times 4\pi\times 2\sqrt{3}=72\sqrt{3}\pi-\frac{8}{3}\sqrt{3}\pi=\frac{208}{3}\sqrt{3}\pi\ (\mathrm{cm}^3).\ .$$ ♡

♠★　半径 r の**球の表面積**：　$S=4\pi r^2$　$\cdots$ ③

半径 r の**球の体積**：　$V=\frac{4}{3}\pi r^3$　$\cdots$ ④

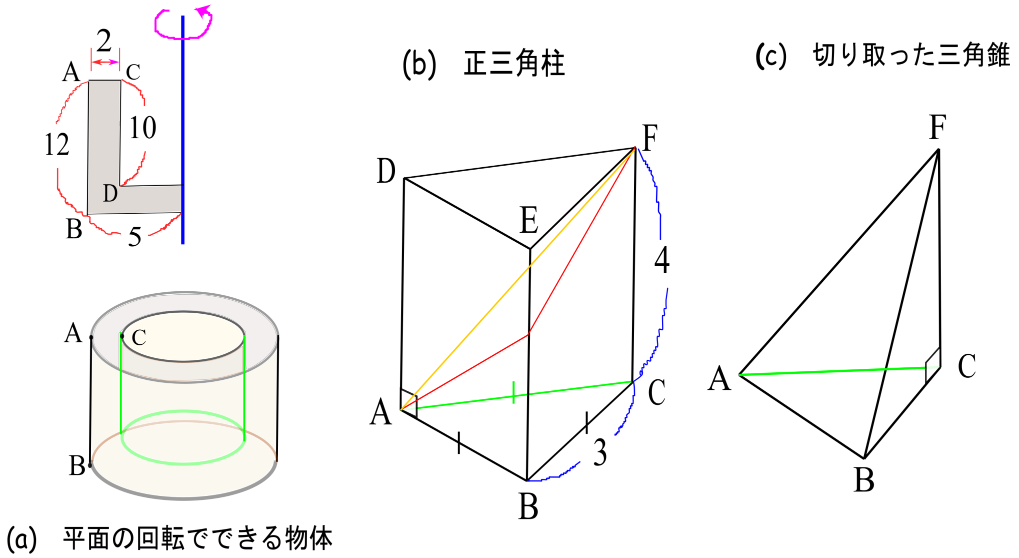
(例)・ 球では，半径が 2 倍になると，表面積は 4 倍，体積は 8 倍になる。

・ テニスボールの半径は約 3.3cm なので，体積 V は　$V=\frac{4}{3}\pi\times(3.3)^3=150.53\ (\mathrm{cm}^3)$.

ソフトボールの半径は約 4.85cm なので，体積 W は　$W=\frac{4}{3}\pi\times(4.85)^3=477.87\ (\mathrm{cm}^3)$.

2 つのボールの体積比は　$\frac{W}{V}=\frac{477.87}{150.53}=\left(\frac{4.85}{3.3}\right)^3=3.17$　である。 ♠

問４． 1 つの直線を軸として，平面図形を 1 回転させてできる立体を**回転体**と呼ぶ。下の図の左のものは，L 字型の平面図形を回転させて作った立体図形（湯のみちゃわんのようなもの）である。この立体図形の体積を求めよ。長さの単位は cm です。また，この立体図形の投影図をかけ。



問５． (1) 上の図 (b) の正三角柱の体積を求めよ。長さの単位は cm です。

(2) この正三角柱から切り取った三角錐 ABCF（図 (c)）の体積を求めよ。また，三角錐 ABEF の体積を求めよ。

(3) 正三角柱の頂点 A, F を通り，また点 A に戻ってくる側面上の曲線で最も短い曲線の長さを求めよ。ただし，1 つの側面は 1 度しか通らないとする。

まとめの問題

注意：図の長さの単位は cm である。

問６． 右図 (a) は，直方体の一部を切り取った空間図形である。BM,CN,MN は辺ではない。見やすくするためにかいてある。次の問に答えよ。

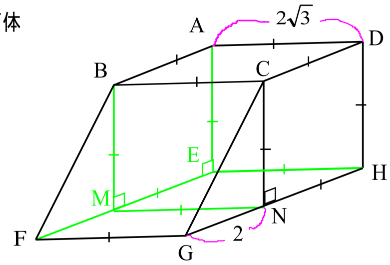
(1) 辺 AB とねじれの位置にある辺を全て求めよ。

(2) 面 ABCD と垂直な辺を全て求めよ。

(3) 面 ABCD と面 BFGC のなす角を求めよ。

(4) この立体の表面積を求めよ。

(a) 六面体



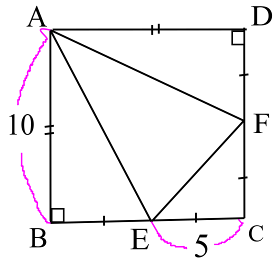
問７． 図 (b) のような 1 辺の長さが 10 の正方形を考える。2 点 E,F は辺の中点である。

(1) △ECF の面積を求めよ。

(2) 3 つの辺 AE,AF,EF を折り曲げてできる三角錐の体積を求めよ。

(3) 上の三角錐で △AEF を底面としたときの三角錐の高さを求めよ。

(b) 三角錐の構成

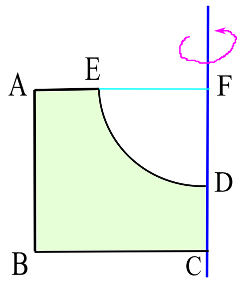


問８． 図形 ABCDE（右図 (c)）を，軸 FC を中心にして 1 回転させてできる立体の表面積と体積を求めよ。四角形 ABCF は正方形で，弧 ED は半径 2 の円の一部である。

(c) 回転体

AB=BC=3cm

EF=FD=2cm



第2章　確率・統計

§ 2.1　確率

ゲームや実験などである行為をするとき，起こりうることがらは2つ以上であることが普通です。起こりうることがらが1つの場合は，ゲームや実験はする意味がないかもね。日常生活の中で，ゲームや実験などでよく使われる方法は，コイン投げ（コイントス；coin toss），さいころ投げ，トランプの利用あるいはじゃんけんなどがあります。

★ 1つのコイン（硬貨；こうか）を1回投げるとき，

表（ヘッド；head）が出る　（これを　ことがらAとよぶ），
裏（テイル；tail）が出る　（これを　ことがらBと呼ぶ）

の2つの場合のどちらかが起こります。コインがたてに立ってしまうことはないとします。ことがらAが起こるか，Bが起こるかは半々ですね。

図(a)にあるように，コインの表とは絵や図が大きく描かれている方です。裏は金額（数）がはっきり読み取れる方です。

コイントスは，テニスの試合で，最初にサーブをとるかレシーブをとるかの決定でよく使われています。審判がコインを投げてコート上に落ちる前に，片方の選手が"表"または"裏"を宣言し，当たった場合にサーブまたはレシーブの好きな方を選択するようです。

(a) コイン　(b)さいころ

★ 立方体の1つのさいころを1回投げるとき，起こりうることがらは

1の目が出る，2の目が出る，3の目が出る，4の目が出る，5の目が出る，6の目が出る

の6通りです。さいころは転がして，上の面に出ている点の数（これを目のかずと呼ぶ）をよみ，"4の目が出た"などと言います。各面には，1つから6つまでの点がかかれています。

図(b)には，さいころの展開図もあげてあるので，暇があったら厚紙でサイコロを作ってみて下さい。さいころでは，1つの面とその反対側の面の目の数をたすと7になるように作られています。1の目の反対側は6の目，2の目の反対側は5の目，3の目の反対側は4の目です。

♠★ 1つのゲームや実験などで，ことがらの起こり方が全部でn通りあるとき，nをそのことがらの起こる場合の数という。

（例）コインを2回投げるとき，起こりうる場合の数は4である。なぜならば，(表，表)，(表，裏)，(裏，表)，(裏，裏)　の場合で全部だからである（1回目は左，2回目は右と考えよ)。

★ 起こりうることがらの1つ1つについて，そのどれが起こることも同じ程度に期待できるとき，どの結果が起こることも同様に確からしいという。 ♠

（例題１）A 君と B さんがじゃんけんを 1 回するとき，起こりうる場合の数はいくつあるか。また，A 君が勝つ場合は何通りあるか。引き分け（勝負がつかない場合）は何通りあるか。

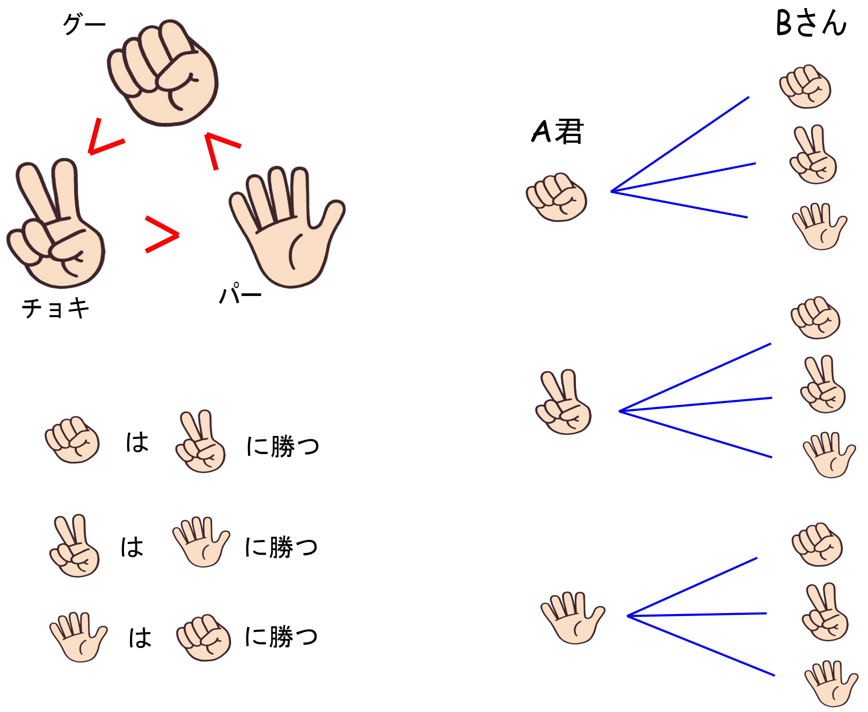


図2-1　じゃんけん，樹形図

解答）じゃんけんのやり方，勝ち負けは皆さんわかっていますよね。知らない方がいたら，上図左部分を参考にして下さい。さて，A 君はグー・チョキ・パーのいずれか 1 つを出します。それぞれの場合に対応して，B さんもグー・チョキ・パーのいずれか 1 つを出します。これを図にすると，上図右のようになります。これは樹形図とよばれています。起こりうる場合の数は 9 つで，A 君が勝つのは 3 通り，引き分けも 3 通りです。.　♡

♠★ あることがらの起こる可能性の度合いを確率（Probability）といいます。例えば，さいころを 1 回投げるとき，目の出方は全部で 6 通りあり，どの目が出ることも同様に確からしいので，1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ と考えることができます。同様に考えると，1 以外の他の目が出る確率も $\frac{1}{6}$ です。

★ 1 つのゲームや実験で，起こりうる場合が全部で n 通りあり，どの場合が起こることも同様に確からしいとする。そのうち，ことがら A の起こる場合が a 通りあるとき，ことがら A の起こる確率 p は　$p = \frac{a}{n}$　$\cdots$　①　である。

$a = 0$ のとき，”ことがら A は決して起こらない”ということなので $p = 0$ である。また，$a = n$ のとき，”ことがら A は必ず起こる”ということなので $p = 1$ である。一般に確率 p は

$0 \leqq p \leqq 1$　$\cdots$　②　の範囲にある。

（例）コイン A とコイン B を同時に投げるとき，一方が表で他方が裏になる確率 p は $p = \frac{1}{2}$ である。なぜならば，起こりうることがらは　(表，表)，(表，裏)，(裏，表)，(裏，裏)　の 4 通り（左側がコイン A の結果，右がコイン B の結果と見よ）であり，題意をみたすことがらは 2 通りあるから　$p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$　である。　♠

(例題２) 白と黒の２つのさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ。

(1) 目の数の和が 6 となる確率　　(2) 目の数の和が 10 以上になる確率

(3) 目の数の積が 12 となる確率　　(4) 目の数の積が 20 以上になる確率

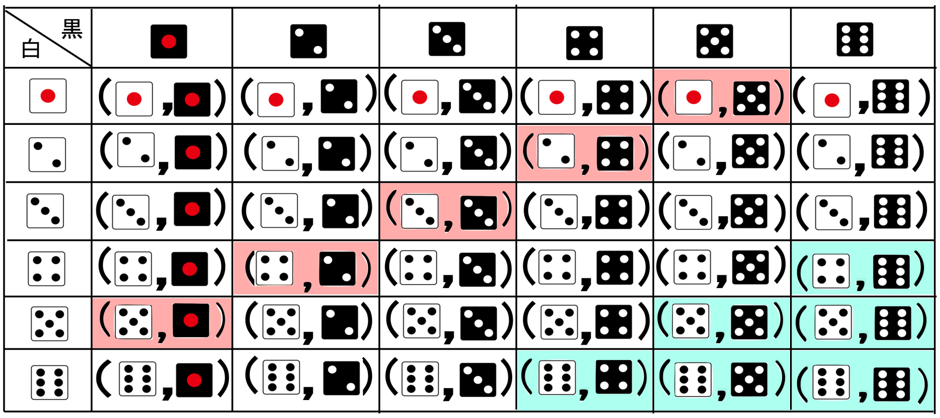


図2-2　2つのさいころ

解答）2 つのさいころを投げたとき，起こりうることがらの総数は 36 通りであり（図 2-2 参照），そのどれが起こることも同様に確からしい。

(1) 目の和が 6 になるのは，図の赤く色を付けたことがらで，5 つある。確率は $p = \dfrac{5}{36}$.

(2) 目の和が 10 以上になることがらには水色をつけた。6 つあるので，確率は　$p = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

(3) 積が 12 になるのは，(3,4)，(4,3)，(2,6)，(6,2) の 4 通りなので，確率は　$p = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$.

(4) 積が 20 以上になるのは，(4,5)，(5,4)，(4,6)，(6,4)，(5,5)，(5,6)，(6,5)，(6,6) の 8 通りなので，確率は　$p = \dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$.　♡

上の例で，ことがら A を A= { 目の和が 6 以下 } としたとき，A が起こらないということがらは B= { 目の和が 7 以上 } である。A と B で全てのことがらだから
(A の起こる確率)+(B の起こる確率)=1 すなわち (A の起こる確率)+(A の起こらない確率)=1 である。一般に，次のことがわかる。

■★　起こりうるすべてのことがらが，ことがら A を含むとき，次のことがわかる：

(A の起こらない確率)= 1−(A の起こる確率)　… ③

(A の起こる確率)= 1−(A の起こらない確率)　… ④　■

(例題３) コインを 3 回投げるとき，少なくとも 1 回裏がでる確率を求めよ。

解答）A= { 少なくとも 1 回裏が出る } に対して，A が起こらないは $B = \{3$ 回とも表が出る $\}$ である。起こりうるすべてのことがらは 8 通りで，B が起こるのは 1 通りだから，B の起こる確率は $\dfrac{1}{8}$.　したがって，A の起こる確率 p は，$p = 1 - \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$.

(注意）コインを 3 回投げるとき，起こりうるすべての場合は 8 通りであることは，樹形図をかいて見れば明らかです。樹形図を書かなくても，1 回投げたとき表か裏の 2 通りがあり，1 回目に何が出たかに関らず，2 回目も表と裏の 2 通りです。ここまでで，場合の数は　$2 \times 2 = 2^2 = 4$　通りです。さらにもう 1 回投げるので，場合の数は　$2^3 = 8$　通りになります。そして，これらのことがらの起こり方は，同様に確からしいと言えます。

さいころを 3 回投げたときも，同様に考えると，起こりうる場合の数は全部で　$6^3 = 216$　通

りです。一般に，1 回で k 個のことがらが起こりうるとき，これを n 回繰り返したとき，起こりうる場合の数は全部で　k^n　$\cdots$ ⑤　通りである。 ♡

(例題４) 異なる 4 つの文字 a, b, c, d からいくつかを選んで，次のような操作をするとき，各問に答えよ。

(1) 2 文字を選んで，横に並べる並べ方は何通りあるか。

(2) 2 文字を選び 1 つのペアをつくるとき，全部で何ペアが可能か。また，a がペアに入る確率を求めよ。

(3) 4 文字全てを横に並べる並べ方（それぞれを列とよぶ）は何通りあるか。このような列から 1 つの列を選ぶとき，列の右端が d のものが選ばれる確率を求めよ。

解答）(1) 可能な場合を全部並べてかくと，次の 12 通りである；

$$ab,\ ba \mid ac,\ ca \mid ad,\ da \mid bc,\ cb \mid bd,\ db \mid cd,\ dc$$

別解も考えられる。箱を 2 つ　□□　用意しておき，左の箱に a, b, c, d のどれか 1 つを入れる入れ方は，4 通りある。このおのおのの場合に対応して，次の箱に入れる入れ方は 3 つの文字のいずれかなので，3 通りある。したがって，全部で　$4 \times 3 = 12$　通りある。

(2) ペアを作るだけだから，(1) の 12 個をたて線 | で分けた 6 個が答えである。ペアとしてかくと，

$$(a, b),\ (a, c),\ (a, d),\ (b, c),\ (b, d),\ (c, d)$$

の 6 つである。(1) の答えを 2 文字の並べ方 2 で割れば答えが得られる。

6 つのペアで a を含むものは 3 個なので，a がペアに入る確率 p は　$p = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$　である。

(3) 4 文字を並べるので箱を 4 つ　□□□□　用意する。一番左の箱に文字を 1 つ入れる入れ方は，4 通りある。このおのおのの場合に対応して，2 番目の箱に 1 つ入れる入れ方は 3 通り（1 つはもう使ったから），同様にして，3 番目の箱に 1 つ入れる入れ方は 2 通り，1 番右の箱に入れる入れ方は 1 通りである。したがって，できうる全ての列の数は

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

通りである。右はしが d である列は，□□□ d　と考え，左側の箱に 3 文字入れる入れ方を考えればよいので，全部で　$3 \times 2 \times 1 = 6$　通りある。このような列が選ばれる確率 p は

$p = \dfrac{6}{24} = \dfrac{1}{4}$　である。 ♡

上の例題より，一般に，異なる n 個のものからいくつかを選んで何かを実行するとき，次のような結果が成り立つのが容易にわかる。これらは高校で習う内容であるが，理屈は簡単なので，知っていると役に立つ。

■★ 異なる n 個のものから r 個取り出して 1 列に並べたものを，n 個のものから r 個とる順列といい，その総数 ${}_n\mathrm{P}_r$ は

$${}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)(n-2)\cdots\ (n-r+1) \quad \cdots \text{⑥}$$

である。${}_n\mathrm{P}_r$ の P は permutation を意味する。

★ 異なる n 個のものから r 個取り出してできる組を，n 個のものから r 個とる組合せといい，その総数 ${}_n\mathrm{C}_r$ は

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ \cdots\ (n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\ \cdots 2 \cdot 1} \quad \cdots \text{⑦}$$

である。${}_n\mathrm{C}_r$ の C は combination を意味する。

★ 異なる n 個のもの全部を使ってできる順列は ${}_n\mathrm{P}_n$ である。これは自然数の 1 から n までの積で n の階乗と呼ばれ，$n!$ とかく；

$${}_n\mathrm{P}_n = n(n-1)(n-2)\ \cdots 2 \cdot 1 = n! \quad \cdots \text{⑧}$$

★（注意）順列・組合せにおいては，1 つを選ぶとき，どの結果が起こることも同様に確からし

いと考えてよい。

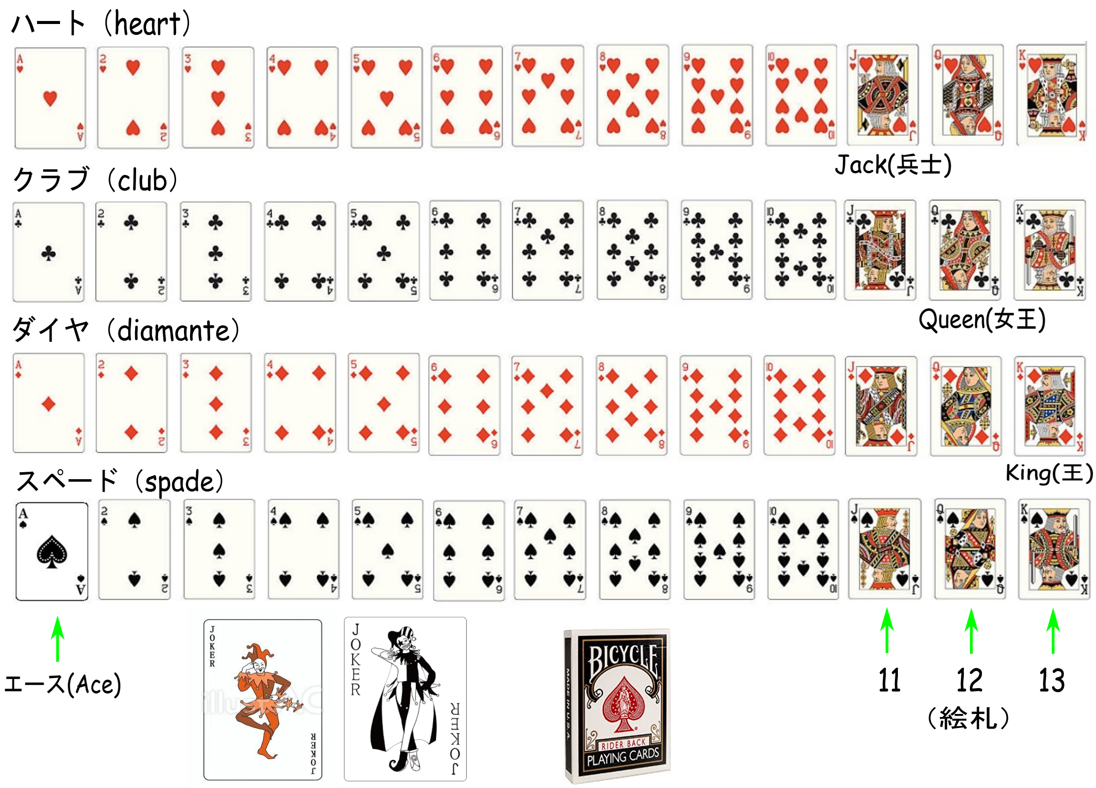
(例) ・ 5 個の数字 0, 1, 2, 3, 4 を用いて，5 ケタの数はいくつできるか。
解）5 個の順列の中から，0 が万の位にあるものを除けばよい；

$_5\mathrm{P}_5 - _4\mathrm{P}_4 = 5! - 4! = 4!(5-1) = 96.$

・ 9 人を 2 人，3 人，4 人に分ける分け方は何通りあるか。
解）まず 2 人を選び，そのおのおのの場合について，残りの 7 人から 3 人を選べばよいので，

$_9\mathrm{C}_2 \times _7\mathrm{C}_3 = 36 \times 35 = 1260.$ ■

（例題５）ジョーカーを除く 52 枚のトランプ（下図参照）から 1 枚カードをひくとき，次の確率を求めよ。
(1) ひいたカードがエースである確率。
(2) ひいたカードがハートまたはダイヤの絵札である確率。



解答）(1) エースは 4 枚あるので，確率は　$p = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}.$
(2) ハートまたはダイヤの絵札は 6 枚あるので，確率は　$p = \dfrac{6}{52} = \dfrac{3}{26}.$

♡

（例題６）(1) A, B, C, D の 4 人が，ある委員会の委員長と副委員長をくじびきで決めるため，トランプのエース 4 枚を使うことにした。A から順番に 1 枚ずつカードをひき，スペードをひいた者が委員長で，ハートをひいた者が副委員長になるようにした。

(ア) A が委員長かつ B が副委員長になる確率を求めよ。
(イ) B と C が，委員長または副委員長になる確率を求めよ。
(ウ) D が委員長にも副委員長にもならない確率を求めよ

(2) ジョーカーを除く 52 枚から，2 枚のカードをひくとき，スペードまたはクラブのカードをひく確率を求めよ。
(3) ハートの札 13 枚から 4 枚のカードをひき，それらのカードの数を見るとき，少なくとも 1 枚

が素数である確率を求めよ。

解答）(1),(ア) 樹形図を作って，線の数を数えるのが一番簡単な方法である。全部で 24 通りの場合があり，題意を満たすくじびきは,（スペード, ハート, クラブ, ダイヤ） と （スペード, ハート, ダイヤ, クラブ） の 2 つだから，確率は　$p = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$.

(イ) 題意を満たすくじびきは（スペードはス，ハートはハ，など 1 文字で表す）,（ク, ス, ハ, ダ）,（ダ, ス, ハ, ク）,（ク, ハ, ス, ダ）,（ダ, ハ, ス, ク） の 4 つだから確率は $p = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$.

(ウ) 題意のくじびきは （□, □, □, ダ）または（□, □, □, ク） であればよい。前の 3 つの□に入れる入れ方は 6 通りあるので，全部で 12 通りである。確率は　$p = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

(2) 2 枚のカードをひくひき方は ${}_{52}\mathrm{C}_2$ 通りで，スペードまたはクラブの 2 枚をひくひき方は ${}_{26}\mathrm{C}_2$ 通りだから，確率は　$p = \frac{{}_{26}\mathrm{C}_2}{{}_{52}\mathrm{C}_2} = \frac{26 \cdot 25}{52 \cdot 51} = \frac{25}{102}$.

(3) 1 から 13 までの素数は $2, 3, 5, 7, 11, 13$ であることに注意せよ。A=$\{$少なくとも 1 枚が素数$\}$ に対して，A が起こらないは $\{$4 枚全部が素数でない$\}$ だから，7 枚のカード $\{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$ から 4 枚が選ばれる場合である。これは ${}_7\mathrm{C}_4 = 35$ 通りある。よって A の起こる確率は

$$p = 1 - \frac{35}{{}_{13}\mathrm{C}_4} = 1 - \frac{7}{143} = \frac{136}{143}.$$

♡

問９． 1，2，3，4，5　の数字を 1 つずつ書いた 5 枚のカードがある。この 5 枚のカードをよくきって，同時に 3 枚をひくとき，次の確率を求めよ。
(1) 3 枚のカードに書いてある数の積が 3 の倍数になる確率を求めよ。（2019 年東京都）
(2) 3 枚のカードに書いてある数の和が 10 以上になる確率を求めよ。

問 10． さいころを 2 回投げて，1 回目に出た目の数を a，2 回目に出た目の数を b として，座標平面上に点 $\mathrm{A}(a, b)$ をとる。このとき，次の確率を求めよ。（ラ・サール高，鹿児島）
(1) 原点 $\mathrm{O}(0, 0)$ と点 A を結ぶ直線の傾きが整数になる確率。
(2) 点 A と点 $\mathrm{B}(7, 7)$ を結ぶ直線の切片が正となる確率。

問 11． 箱の中に赤玉が 1 個，青玉が 2 個，黄玉が 3 個はいっている。この箱の中から同時に 2 個の玉をとり出すとき，次の確率を求めよ。
(1) とり出した 2 個の玉がちがう色である確率。
(2) とり出した 2 個の玉のうち，多くても 1 個は青玉である確率。
(3) とり出した 2 個の玉のうち，少なくとも 1 個は黄玉である確率。

§ 2.2　統計；資料の分析と活用

人の集団やものの集合について，ある性質や特徴などを知りたいと思うことは，日常の生活の中でよくあります。私たちは集団全体の特徴をつかむために，観測したデータなど（これらは数値の場合が多く，資料と呼ばれる）を集めて整理・分析し，問題解決のために利用します。

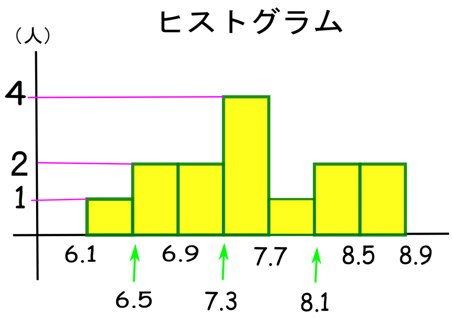
この節では，いくつかの例題を用いて，統計の基礎的な方法・用語などを身につけましょう。

（例題１）次の資料は，ある中学校の 3 年生 14 名の 50m 走の記録（タイムとよばれ，単位は秒）です；　　6.2, 7.5, 8.1, 6.8, 7.2, 7.9, 8.7, 7.4, 6.7, 7.1, 8.5, 7.6, 7.3, 8.4

データとしての数字を見ているだけでは全体の様子がよく分からないので，タイムを 7 つの階級に分けて，その階級に属す人数を度数として，下のように表にしました（これを度数分布表といいます)。

50m走　度数分布表

階級;タイム(秒) 以上　未満	度数（人）	相対度数
6.1 ～ 6.5	1	0.071
6.5 ～ 6.9	2	0.143
6.9 ～ 7.3	2	0.143
7.3 ～ 7.7	4	0.286
7.7 ～ 8.1	1	0.071
8.1 ～ 8.5	2	0.143
8.5 ～ 8.9	2	0.143
合計	14	1.000



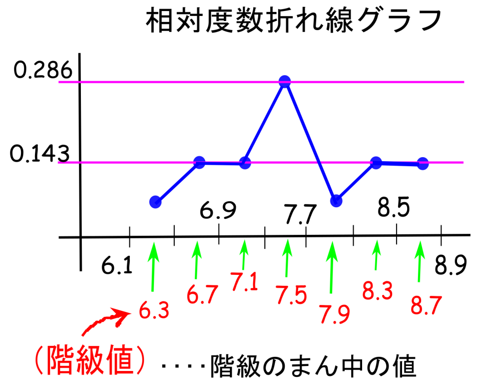


図2.3　資料の整理

度数分布表の階級，例えば 7.3 ～ 7.7 は，7.3 以上で 7.7 未満を意味します。不等号でかくと $7.3 \leqq x < 7.7$ を満たす x の範囲という意味になります。したがって，7.7 というデータは次の階級に入ります。各階級のまん中の値（$6.3, 6.7, 7.1, \cdots$）は，その階級を代表する値で，階級値と呼ばれます。

相対度数とは，　$$\frac{\text{（その階級の度数）}}{\text{（度数の合計）}} \quad \cdots \quad ①$$

であり，全部たすと 1.00 になります。度数分布表の度数を棒グラフにして表したグラフはヒストグラム（histogram）と呼ばれます（上図の右上のもの)。グラフにすると資料（データ）の分布は，一目瞭然（いちもくりょうぜん）ですね。人間には，グラフや絵の方が理解しやすいね。

上図右下の相対度数折れ線グラフは，相対度数の値（階級値の真上に点をうつ）を線で結んだグラフです。ヒストグラムと共に，よく使われます。テレビのニュース番組でも，このようなグラフはよく見ますね。相対度数は，100 倍するとパーセント（％；percentage）を表すので，わかりやすい数値です。　♡

上のように資料をまとめたとき，分布の中心の位置はどこか，また中心を表すような代表的な値は何だろうか，知りたいよね。分布の散らばりの度合い；すなわち，“ 分布は広いか狭いか，か

たよりがあるか”なども気になるよね。

♠★ 個々の資料の値の合計を資料の総数でわった値を平均値という。

$$（平均値）=\frac{（資料の和の合計）}{（資料の総数）} \quad \cdots \quad ②$$

資料の総数を n，資料を $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,x_n$ としたとき，平均値 m（mean）は，次のようにかける；

$$m=\frac{x_1+x_2+x_3+\ \cdots\ +x_n}{n} \quad \cdots \quad ③$$

平均値は，資料の中心の位置を表す値と考えられます。

（例）上の 50m 走の例題では，平均値は

$$m=\frac{6.2+7.5+8.1+6.8+7.2+7.9+8.7+7.4+6.7+7.1+8.5+7.6+7.3+8.4}{14}=7.53$$

になります。ヒストグラムのまん中の度数 4 の階級に位置しています。

（注意）$m=7.53$ なる値は，小数第 3 位を四捨五入した値である。

★ 資料の値を大きさの順にならべたとき，中央の値を中央値（またはメジアン）と呼ぶ。資料の総数が奇数の場合は，中央値は 1 つに決まります。資料の総数が偶数の場合は，中央にある 2 つの値の平均値を中央値とします。中央値もまた，資料の中心を表す 1 つの値です。しかし，一般には，平均値とは一致しません。

（例） 例題 1 の資料を小さい順に並べると；

$$6.2<6.7<6.8<7.1<7.2<7.3<7.4<7.5<7.6<7.9<8.1<8.4<8.5<8.7$$

中央の 2 つの値は 7.4，7.5 なので，中央値 me（median）は，$me=\dfrac{7.4+7.5}{2}=7.45$ である。

★ 資料の分布のちらばりの度合いを表す量としては次のようなものがある。

・資料の最大値から最小値を引いた値を，分布の範囲（またはレンジ）という。

$$（範囲）=（最大の値）-（最小の値） \quad \cdots \quad ④$$

・中央値の左側にある資料の中央値を第 1 四分位数（だいいちしぶんいすう）という。また，中央値の右側にある資料の中央値を第 3 四分位数という。中央値を第 2 四分位数と呼ぶこともある。第 3 四分位数から第 1 四分位数を引いた値を四分位範囲という；

$$（四分位範囲）=（第3四分位数）-（第1四分位数） \quad \cdots \quad ⑤$$

第 1 四分位数から第 3 四分位数までに，資料のほぼ半分が入ることは明らかです。したがって，四分位範囲は，中央値を含むまん中の半分の資料を含む範囲の大きさ (幅) と見なせます。

（例） 例題 1 の資料では，範囲は $8.7-6.2=2.5$ （秒）です。また，中央値の左側は 7 つの資料があり，まん中が 7.1 なので，第 1 四分位数は 7.1，同様に第 3 四分位数は 8.1 である。したがって，四分位範囲は 1.0 である。“中央値を含むまん中の半分の資料が 1 秒の中におさまっている”と考えてよい。 ♠

(例題２) ある大学の理学部 S 学科に入学した新入生 55 人の身長のデータ（単位は cm）が公開されている。資料は，度数分布表，および基本的な数値； 最大値 186，最小値 157，平均値 171.6，中央値 172.0 のみである。

［度数分布表］

階級	度数	階級	度数
155 ～ 159	1	171 ～ 175	11
159 ～ 163	3	175 ～ 179	11
163 ～ 167	12	179 ～ 183	5
167 ～ 171	9	183 ～ 187	3

(1) 階級値，相対度数，および（階級値）×（度数）のらんを追加して，度数分布表を新たに作

りなさい。また，ヒストグラムも示しなさい。
(2) 資料や平均値は未知であると仮定して，度数分布表から平均値の近似値を求めなさい。
(3) 第1四分位数，第3四分位数を予測して，四分位数の近似値を求め，箱ひげ図（中2の教科書，または下の定義を参照せよ）作りなさい。

解答）(1) 度数分布表，ヒストグラムを示す。（階級値）×（度数） のらんの数は， 1つの階級に属す学生の身長の総和の近似値を示していることがおわかりでしょうか。

身長　度数分布表　最小値157，最大値186，平均値171.6，中央値172

階級（以上～未満）	階級値 x_i	度数 f_i	相対度数	(階級値)×(度数)
155 ~ 159	157	1	0.018	157
159 ~ 163	161	3	0.055	483
163 ~ 167	165	12	0.218	1980
167 ~ 171	169	9	0.164	1521
171 ~ 175	173	11	0.2	1903
175 ~ 179	177	11	0.2	1947
179 ~ 183	181	5	0.091	905
183 ~ 187	185	3	0.055	555
合計		55	1.00	9451

$m = \frac{9451}{55} = 171.8$

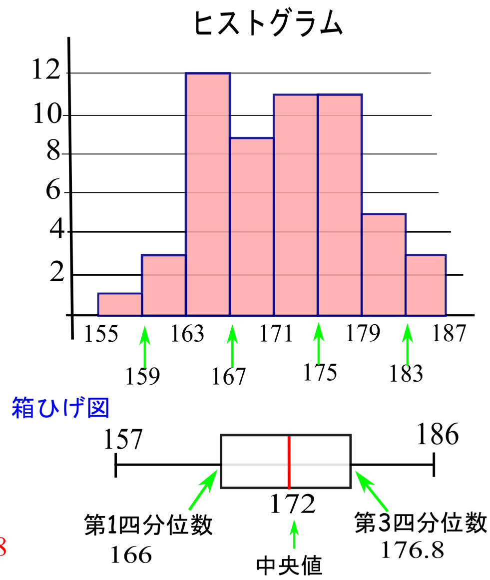


図2.4　身長（例題2）

(2) （階級値）×（度数） のらんの合計は，全学生の身長の和の近似値を表す。この数値を用いた，平均値の近似の値 m は　$m = \dfrac{9451}{55} = 171.8$　である。本当の平均値と 0.2cm しかちがわないですね。十分信頼できる近似値と考えられます。真の平均値がわからなくても，このような計算で，おおよその値を計算することができます。

(3) 資料の個数は 55 なので，まん中は 28 番目，14 番目が第 1 四分位数，42 番目が第 3 四分位数である。

小さい順番； 1――――14――――28――――42――――55
最小値　第 1 四分位数　中央値　第 3 四分位数　最大値

14 番目の資料は，第 3 階級の 10 番目の資料なので 163～167 を 12 等分して，10 番目の近似値は

$$163 + 9 \times \frac{4}{12} = 166 \quad \text{（第 1 四分位数の近似値）}$$

と計算できる。同様に，42 番目の資料は第 6 階級の 6 番目なので，その近似値は

$$175 + 5 \times \frac{4}{11} = 176.8 \quad \text{（第 3 四分位数の近似値）}$$

と計算できる。したがって，四分位範囲（これは近似の値）は　$176.8 - 166 = 10.8$　である。資料のまん中にある半分は，10.8cm の巾の中におさまっていると考えてよい。箱ひげ図は，上図右下のものである。最小値 157 から第 1 四分位数 166 までの線，および第 3 四分位数 176.8 から最大値 186 までの線はひげと呼ばれる。まん中の四角の箱の中には，約半分の資料が含まれる。

資料の範囲は　$186 - 157 = 29$　であるのに対して，四分位範囲は 10.8 ということなので，資料は中央値の周りに密集しているようすが読み取れる。 ♡

資料として，度数分布表またはヒストグラム（あるいは相対度数折れ線グラフ）しか与えられていないとき，平均値の計算の方法を示す。また，分布の広がりやその形などと関係する箱ひげ図の作り方にもふれる。

♠★ 度数分布表しかないときの平均値の計算を示す。与えられた資料から下図のような度数分布表を改めて作る。階級値，相対度数，(階級値)×(度数) などのらんは必要に応じて付け加えて下さい。

階級 以上　未満	階級値 c_i	度数 f_i	相対度数 $r_i=\frac{f_i}{n}$	(階級値)×(度数) $c_i f_i$	(階級値)×(相対度数) $c_i r_i$
$x_1 \sim x_2$	c_1	f_1	r_1	$c_1 f_1$	$c_1 r_1$
$x_2 \sim x_3$	c_2	f_2	r_2	$c_2 f_2$	$c_2 r_2$
$x_3 \sim x_4$	c_3	f_3	r_3	$c_3 f_3$	$c_3 r_3$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$x_k \sim x_{k+1}$	c_k	f_k	r_k	$c_k f_k$	$c_k r_k$
合計		n	1.00	y	m

平均値　$m=\frac{y}{n}$

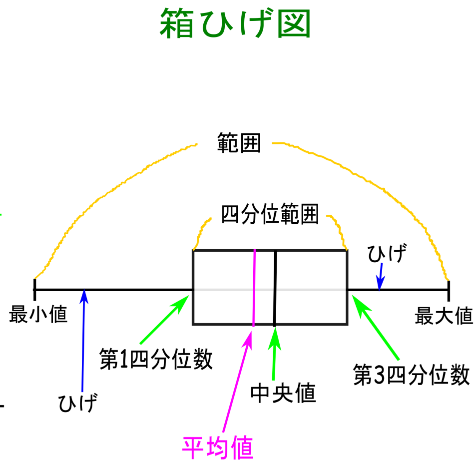


図2.5　度数分布表，箱ひげ図

例題 2 で説明したように，平均値（近似値）m の計算は次のどちらかの式を使えばよい；

$$m=\frac{c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3+\ \cdots\ +c_kf_k}{n} \qquad \cdots \quad ⑥$$

$$m=c_1r_1+c_2r_2+c_3r_3+\ \cdots\ +c_kr_k \qquad \cdots \quad ⑦$$

(注意）上の平均値は，あくまでも近似の値であり真の平均値ではない。

★ 上図右の箱ひげ図は，分布の散らばりの度合いを見ることができる優れた図である。箱の部分には半分の資料が入っている。四分位範囲の大・小によって，散らばりの度合いが大きいか小さいかがわかる。注意してほしいのは，中央値や第 1 四分位数などの値の計算である。資料（データ）は大きさの順に並べておくこと。

1) 資料の総数 n が偶数のとき，中央値は $\frac{n}{2}$，と $\frac{n}{2}+1$ 番目のデータの平均値。第 1 四分位数は，1 番目から $\frac{n}{2}$ 番目までの中央値，第 3 四分位数は，$\frac{n}{2}+1$ 番目から n 番目までの中央値である。

2) 総数 n が奇数のとき，中央値は $\frac{n+1}{2}$ 番目のデータ。第 1 四分位数は，1 番目から $\frac{n+1}{2}-1$ 番目までのデータの中央値，第 3 四分位数は $\frac{n+1}{2}+1$ 番目から n 番目までの中央値である。

（例） $n=60$ のとき，中央値は 30 番目のデータと 31 番目のデータの平均値である。第 1 四分位数は，最初から 30 番目までのデータの中央値だから，15 番目のデータと 16 番目のデータの平均値である。同様に，第 3 四分位数は，45 番目のデータと 46 番目のデータの平均値である。

★ 資料で，もっとも度数が多い値を最頻値（さいひんち）またはモードという。度数分布表から最頻値を求めるときは，度数のもっとも多い階級の階級値である。

(例） 資料　20kg, 22kg, 25kg, 25,kg, 27kg, 27kg, 27kg, 28kg, 30kg, 30kg, 33kg　の最頻値は 27kg である。 ♠

（例題３）神奈川県のある地点における１日の気温の寒暖差（最高気温と最低気温の差）を１年間毎日記録し，月ごとの特徴を調べるため，ヒストグラムを作成した。

次の図の A〜F のヒストグラムは，１日の気温の寒暖差の記録を月ごとにまとめたものであり，１月と 11 月を含む６つの月のヒストグラムいずれかを表している。なお，階級は２℃以上４℃未満，４℃以上６℃未満などのように，階級の幅を２℃にとって分けられている。

これらの６つの月に関するあとの説明から，１月のヒストグラムと，11 月のヒストグラムとしてもっとも適するものを A〜F の中からそれぞれ１つ選びなさい。（令和２年，神奈川県）

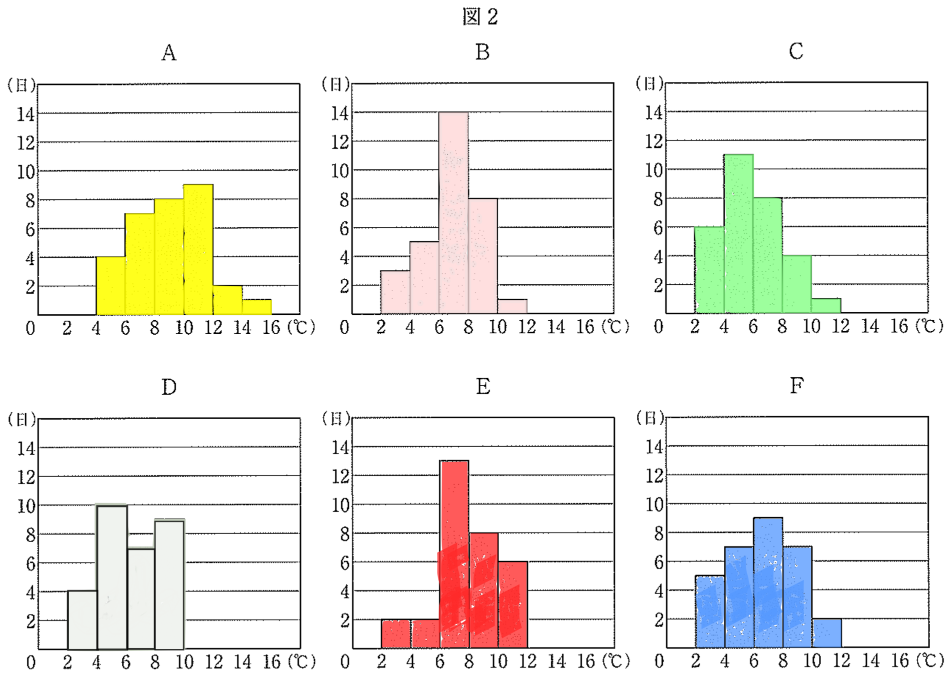


図2.6　月ごとの寒暖差の記録

＜説明＞

(a) １月には，寒暖差が 10 ℃以上の日はあったが，寒暖差が 12 ℃以上の日はなかった。

(b) １月の寒暖差の中央値は６℃以上８℃未満の階級にあった。

(c) １月の寒暖差の平均値は，６つの月のヒストグラムから読み取れる寒暖差の平均値の中で２番目に大きかった。

(d) １月，11 月ともに，寒暖差が４℃未満の日は４日以内であった。

(e) 11 月には，2.1 ℃の日があった。

(f) 11 月の寒暖差の最頻値は，４℃以上６℃未満の階級の階級値であった。

解答）　この問題は、まずヒストグラムの度数を数える必要がある。A から F までの度数はそれぞれ 31, 31, 30, 30, 31, 30　である。したがって、１月のものは A, B, E のいずれかで、これら以外の中に 11 月のものがある。

ひと月が 31 日の場合，データを小さい順に並べたとき，中央値は 16 番目のデータである。また，ひと月が 30 日の場合，中央値は 15 番目のデータと 16 番目のデータの平均値であることに注意せよ。

(a) から分かること：　A は１月のものではない。

(b) から分かること：　B, E はともにこれを満たす（１月のものの候補）。

(c) から分かること：　１月のものの平均値は、六つの中で、２番目に大きいということなので、各ヒストグラムから平均値を計算しなければならない。一応全部計算してみよう。

$$(\text{A の平均値})=\frac{5\times4+7\times7+9\times8+11\times9+13\times2+15}{31}=\frac{281}{31}=9.06$$

$$(\text{B の平均値})=\frac{9+25+98+72+11}{31}=\frac{215}{31}=6.94$$

$$(\text{C の平均値})=\frac{18+55+56+36+11}{30}=\frac{176}{30}=5.87$$

$$(\text{D の平均値})=\frac{12+50+49+81}{30}=\frac{192}{30}=6.4$$

$$(\text{E の平均値})=\frac{6+10+91+72+66}{31}=\frac{245}{31}=7.90$$

$$(\text{F の平均値})=\frac{15+35+63+63+22}{30}=\frac{198}{30}=6.6$$

となるので、ここで E が 1 月のものであることが分かる。

全部の平均値を計算したが，ヒストグラムをながめていると，A,B,E の平均値は，C,D,F の平均値より大きいのが直感的に予想できるので，A,B,E の 3 つの平均値で答えがわかるでしょう。

(d) から分かること：　11 月のものにたいして、寒暖差が 4℃未満の日は 4 日以内なので、C, D, F のうちこれを満たすものは D しかない。よって 11 月のものは D である。

(e), (f) は必要ないが、確認のために使える。

これは，神奈川県の入学試験問題の中の 1 つだが，平均値の計算でもたもたしていると，時間がどんどんなくなっていくでしょう。計算をどれだけカットできるかも重要ですね。 ♡

問 12. ある中学校の 3 年 A 組 27 名のソフトボール投げ（単位はメートル）の結果が下のものである；

20.2	19.1	18.5	25.0	26.4	13.4	14.6	30.8	25.3
23.6	27.2	15.5	16.9	21.0	22.7	17.6	24.4	22.5
25.1	28.8	32.4	33.0	16.5	17.0	23.4	29.2	13.8

次の問に答えなさい。

(1) 平均値，中央値，範囲，四分位範囲を求めなさい。平均値は，四捨五入して小数第 2 位まで示しなさい。

(2) 階級の幅 3 で，度数分布表を作りなさい。度数分布表には，階級値，相対度数，（階級値）×（度数）のらんも入れること。また，ヒストグラムと箱ひげ図も作りなさい。

(3) 27 個のデータがわからないと仮定して，度数分布表から平均値を求めなさい（四捨五入して小数第 2 位まで示せ）。

(4) ソフトボール投げの結果に対して，このクラスの特徴など，気がついたことがあれば述べよ。

（注意）ソフトボールは，外周が 30.48cm，重さは 187.8g くらいのややかたいボールである。ハンドボールは，外周が 55cm，重さは 350g くらいの粘着性があるボールである。これらを使ったゲームは共にオリンピック（2021 年，東京）の種目になっている。

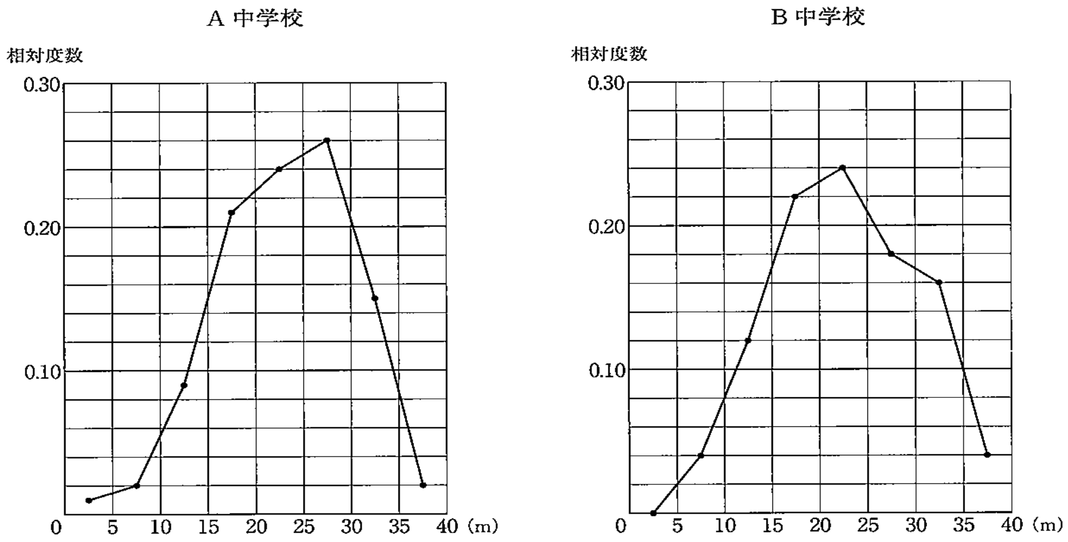
問 13. A 中学校の生徒 100 人と，B 中学校の生徒 150 人のハンドボール投げの記録が，下の相対度数折れ線グラフで与えられている。階級は，5m 以上 10m 未満，10m 以上 15m 未満などのように，階級の幅を 5m にとっている。下の 4 つの文章から正しいものを 2 つ選びなさい。

あ. 中央値を含む階級の階級値は，A 中学校と B 中学校で同じである。

い. 記録が 20m 未満の生徒の割合は，A 中学校より B 中学校の方が小さい。

う. 記録が 20m 以上 25m 未満の生徒の人数は，A 中学校より B 中学校の方が多い。

え. A 中学校，B 中学校ともに，記録が 30m 以上の生徒の人数より記録が 25m 以上 30m 未満の生徒の人数の方が多い。　　　　（令和 3 年，神奈川県）

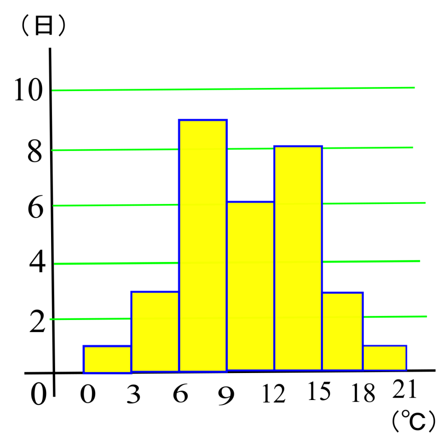


問 14．桃花さんは，5 月に A 市のキャンプ場に行くことになりました。キャンプの準備をするために，キャンプ場の過ごしやすさについて，気候に着目し，A 市の昨年 5 月の最高気温，最低気温，日照時間，最大瞬間風速，降水量をインターネットで調べました。さらに，調べた最高気温から最低気温をひいて気温差を求め，下の表のようにまとめました。（令和 3 年，全国学力調査）

調べたこと

日付	最高気温℃	最低気温℃	気温差℃	日照時間（時間）	最大瞬間風速（m/秒）	降水量（mm）
1日	20.9	6.9	14.0	5.8	7.4	0.0
2日	25.9	9.1	16.8	12.0	7.3	0.0
3日	27.3	12.8	14.5	10.3	8.2	0.0
4日	20.3	11.8	8.5	2.5	9.5	0.0
5日	23.5	9.4	14.1	9.9	11.9	0.5
6日	13.2	5.5	7.7	0.1	8.7	2.0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
31日	20.9	9.2	11.7	2.2	9.1	0.0

日照時間とは，1日のうちで，日光によってものの影ができた時間の合計のこと。



図A．問14（気温差と日照時間）

(1) 桃花さんは，調べたことの表から，気温差が大きい日や小さい日があることが気になり，気温差の分布のようすを，ヒストグラムにまとめました（図 A の右）。例えば，気温差が 3 ℃以上 6 ℃未満の日が 3 日あったことを表しています。

・ 気温差が 9 ℃以上 12 ℃未満の階級の度数を求めなさい。
・ 中央値はどの階級にあるか求めなさい。
・ ヒストグラムから，平均値を求めなさい。

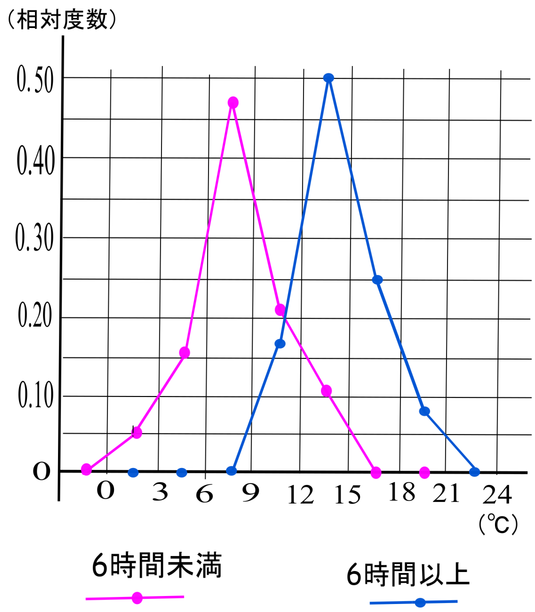
(2) 桃花さんは，気温差のヒストグラムを見て，6 ℃以上 9 ℃未満と 12 ℃以上 15 ℃未満の階級の

度数が多く，山が２つあるように見えることが気になりました。調べたことの表を見直したところ，日照時間が長い日は，気温差が大きい傾向にあるのではないかと考えました。そこで，日照時間が６時間未満の日と６時間以上の日で分けてまとめた気温差について，それぞれの階級の相対度数を求め，度数分布表に表しました。

気温差の度数分布表

気温差℃	6時間未満		6時間以上	
以上　未満	度数（日）	相対度数	度数（日）	相対度数
0 〜 3	1	0.05	0	0.00
3 〜 6	3	0.16	0	0.00
6 〜 9	9	0.47	0	0.00
9 〜 12	4	0.21	2	0.17
12 〜 15	2	0.11	6	0.50
15 〜 18	0	0.00	3	0.25
18 〜 21	0	0.00	1	0.08
合計	19	1.00	12	1.00

気温差の度数分布多角形



図B　日照時間と気温差

上の気温差の度数分布表のように，２つの分布の傾向を比べるために相対度数を用いるのは，次のような考えが使われているからです。

－－－

２つの分布の傾向を比べるために相対度数を用いるのは，日照時間が「６時間未満」と「６時間以上」の【　　】が違うからです。

－－－

上の【　　】に当てはまる言葉として正しいものを，下のアからエまでの中から１つ選びなさい。

ア　日照時間　　　イ　気温差　　　ウ　階級ごとの度数　　　エ　度数の合計

(3) 桃花さんは，気温差の度数分布表をもとに，横軸を気温差，縦軸を相対度数として度数分布多角形（度数折れ線）に表しました（図Ｂ，右）。

気温差の度数分布多角形から，「日照時間が６時間以上の日は，６時間未満の日より気温差が大きい傾向にある」と主張することができます。そのように主張することができる理由を，気温差の度数分布多角形の２つの度数分布多角形の特徴を比較して説明しなさい。

問題の答え

問１． (1) 1 つの面は，辺の長さ 1 の正三角形。この正三角形を △ABC（A は上部の頂点）とおく。辺 BC の中点を M とすると，高さは AM で，AM= $\frac{\sqrt{3}}{2}$. したがって，面積 S は，
$S = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.（答え）
点 A から底面に垂線を下し，底面との交点を O とする。正四面体の高さは，△AMO の AO だから，これを h とおく。△OBM は，∠B= 30°, BM= $\frac{1}{2}$ の直角三角形だから，OM= $\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.
△AMO に三平方の定理を使うと，

$$h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad h^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3} \quad \therefore \quad h = \frac{\sqrt{6}}{3}.\ （答え）$$

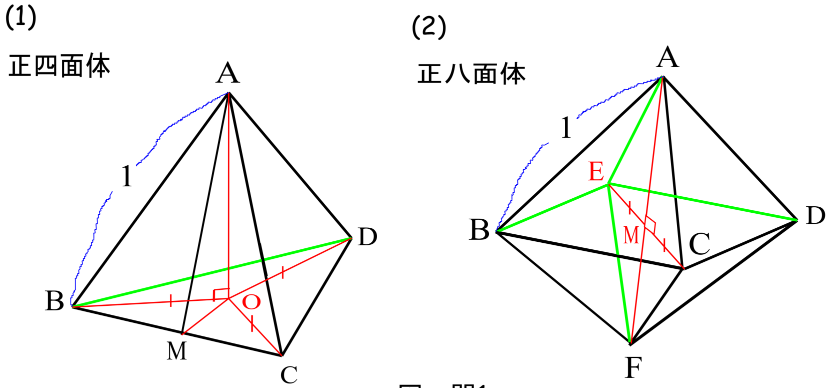
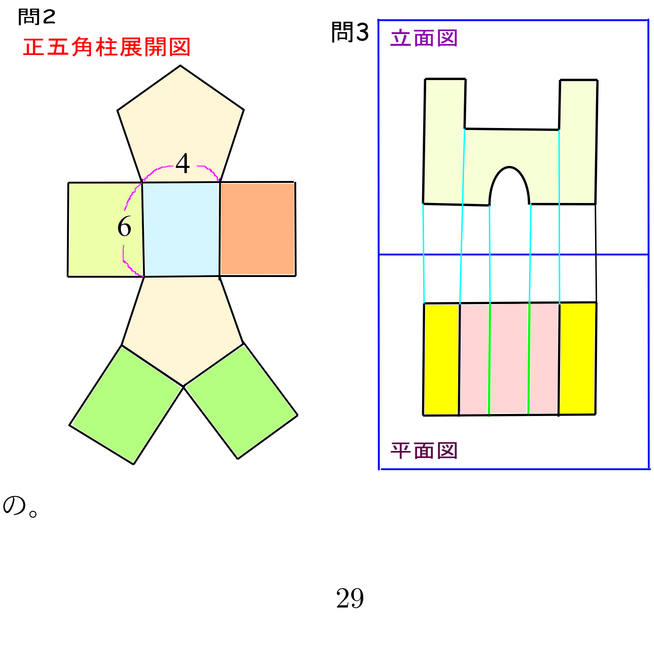


図　問1

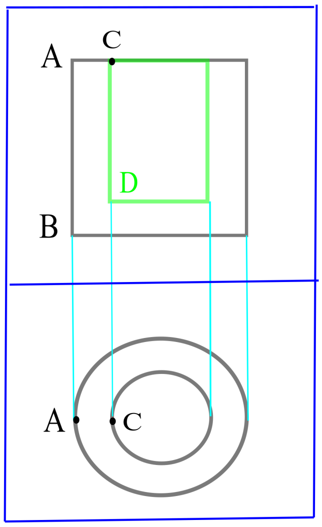
(2) AC = AE = 1，EC= $\sqrt{2}$ だから，△AEC は，∠A= 90° の二等辺三角形。辺 EC の中点を M とすると，AM= $\frac{\sqrt{2}}{2}$. したがって，AF= $\sqrt{2}$ であり，AF=EC=BD だから 2 頂点間の距離で 1 番長いのは $\sqrt{2}$（答え）である。

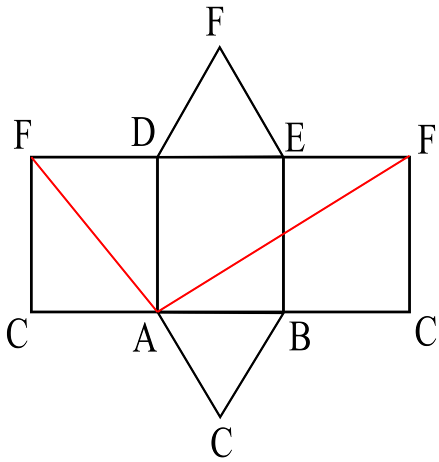
問２． (1) 辺 IJ, HI, GH, DE, CD, BC.　(2) 辺 AB.　(3) 辺 FG, GH, HI, IJ, JF.
(4) 平面 BCHG と垂直な平面：正五角形 ABCDE と FGHIJ.
　平面 BCHG と平面 CDIH のなす角は 108°.
(5) 下図，左のもの。



問３． 上図，右のもの。

問４． 外側の面を形作る円柱の体積から，中側の空洞部分を作る円柱の体積をひき算すればよい。
よって体積 V は，　$V = \pi \times 5^2 \times 12 - \pi \times 3^2 \times 10 = 300\pi - 90\pi = 210\pi\ (\mathrm{cm}^3)$.
投影図は，下の図の左のもの。





問５． (1) 底面の正三角形は一辺の長さが 3 だから，面積は　$\frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{2}\sqrt{3} = \frac{9}{4}\sqrt{3}$.　よって，
体積は，$V = \frac{9}{4}\sqrt{3} \times 4 = 9\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^3)$.

(2) 三角錐 ABCF は，底面積は上の三角柱と同じで，高さも同じだから，体積は三角柱の 3 分の 1 なので　$3\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^3)$ である。
　また，三角錐 ABEF は，三角柱から 2 つの三角錐 ABCF と DEFA を切り取った残りである。三角錐 DEFA の体積は三角錐 ABCF と同じなので，三角錐 ABEF の体積は $3\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^3)$.

(3) 頂点 A, F, A を結ぶ曲線で一番短いものは 2 本の直線の和である。展開図（上図右）で見たとき，赤で示した 2 本の直線である。長方形 ACFD（右の側面 2 つ分）の対角線である AF を x とおくと，　$x^2 = 4^2 + 6^2 = 52$　だから　$x = 2\sqrt{13}$　また，長方形 CADF（左の側面 1 つ）の対角線である FA の長さは 5 なので，求める最短曲線の長さは　$5 + 2\sqrt{13}$ (cm) である（約 12.21cm）。

問６． (1) 辺 FG, GC, DH, EH.　　(2) 辺 DH, AE.
(3) △CGN は，$\angle\mathrm{C} = 30^\circ$ の直角三角形だから，２つの面のなす角は 120°.
(4) 計算の詳細はは略す。答えは $60 + 16\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^2)$.

問７． (1) △ECF の面積　$\frac{25}{2}\ (\mathrm{cm}^2)$　　(2) 体積は　$\frac{125}{3}\ (\mathrm{cm}^3)$
(3)　△AEF を底面としたときの高さは　$\frac{10}{3}$ (cm)

問８． 表面積は　$40\pi(\mathrm{cm}^2)$，体積は　$\frac{65}{3}\pi(\mathrm{cm}^3)$

問９． (1) 5 枚のカードから 3 枚のカードを取り出す組合せは ${}_5\mathrm{C}_3 = 10$　通り。積が 3 の倍数になる組合せは 3 を 1 個含む組合せ（□，□，3）で，${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通りあるので，確率は $p = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.
(2) 和が 10 以上になる組合せは (1,4,5), (2,3,5), (2,4,5), (3,4,5) の 4 通りだから，
確率は $p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

問 10． (1) 直線 OA の傾きは　$\frac{b}{a}$　である。この値が整数になるのは

$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \cdots, \frac{6}{1}, \frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \frac{6}{2}, \frac{3}{3}, \frac{6}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{6}{6}$ の 14 通り。答えは $p = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$.

(2) 直線 AB の傾きは $\frac{7-b}{7-a}$ で，この直線の切片が正になるのは，傾きが 1 以下のとき；

$$\frac{7-b}{7-a} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad a < b \quad \cdots \quad ①$$

式 ①を満たす場合は，15 通りあるので答えは $p = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

問 11. 同じ色の玉が 2 個以上ある場合でも，組合せを考えるときはそれらを別の玉と思って，組合せの個数を数えなければならない。したがって，青色の玉は①，②の番号を，黄色の玉は①，②，③の番号をつけて，右図のような組合せの樹形図を作る。

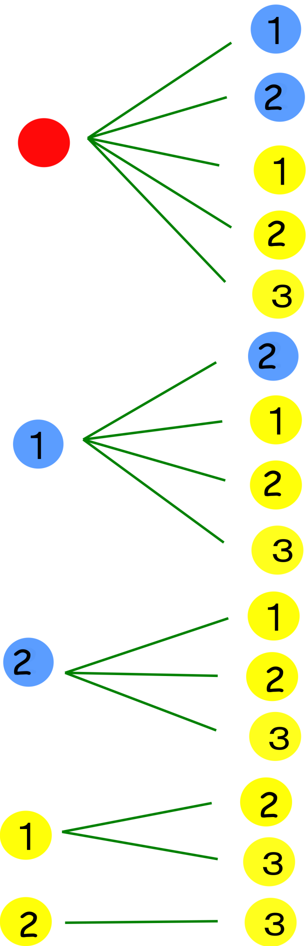
(1) 色が異なる組合せの線を数えると 11 個あるので，

確率は $p = \frac{11}{15}$.

(2) 多くても 1 個青玉とは，{青玉なし} または {青玉 1 個} ということなので，線の数を数えると 14 個ある。よって，確率は $p = \frac{14}{15}$.

(3) 少なくとも 1 個黄玉とは，{黄玉 2 個} または {黄玉 1 個} ということなので，数えると 12 個ある。

よって，確率は $p = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.



問11　樹形図

問 12. (1) 平均値 m は $m = \frac{603.9}{27} = 22.37$.
全資料を小さい順に並べると

13.4	13.8	14.6	15.5	16.5	16.9	17.0
17.6	18.5	19.1	20.2	21.0	22.5	22.7
23.4	23.6	24.4	25.0	25.1	25.3	26.4
27.2	28.8	29.2	30.8	32.4	33.0	

中央値は 14 番目の 22.7，第 1 四分位数は 7 番目の 17.0，第 3 四分位数は 21 番目の 26.4 である。以上より，

範囲は　33-13.4=19.6,

四分位範囲は　26.4-17.0=9.4.

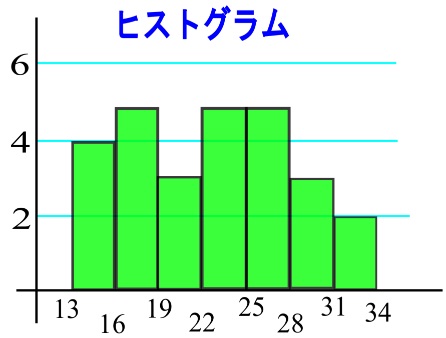
(2) 度数分布表，ヒストグラム，箱ひげ図は次ページの図である。ヒストグラムは，山が 2 つあるような形をしている。また，箱ひげ図の箱はけっこう左側に寄っている。これらのことは，小さなデータが多かったためであろう。

(3) 27 個のデータがわからないときは，度数分布表の $x_i f_i$ のらんの合計を，全データの総和とみなして計算するので，平均 m は $m = \frac{610.5}{27} = 22.61$. 真の平均値よりやや大きくなっている。

(4) 小さなデータもやや多いので，ソフトボール投げに慣れていない者が少なからずいるようだ。

ソフトボール投げ　度数分布表

階級 以上　未満	階級値 x_i	度数 f_i	相対度数	$x_i f_i$
13 ~ 16	14.5	4	0.148	58.0
16 ~ 19	17.5	5	0.185	87.5
19 ~ 22	20.5	3	0.111	61.5
22 ~ 25	23.5	5	0.185	117.5
25 ~ 28	26.5	5	0.185	132.5
28 ~ 31	29.5	3	0.111	88.5
31 ~ 34	32.5	2	0.074	65.0
合計		27	1.000	610.5



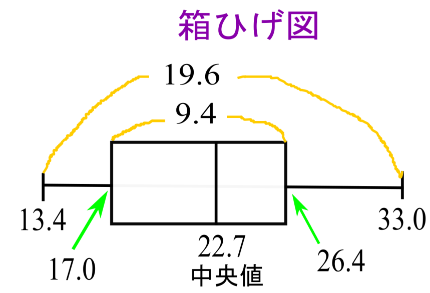


図　問12（ソフトボール投げ）

問 13．グラフから，各階級の相対度数を左から順にたしていった数 (累積相対度数と呼ばれる) は

A 中学校：　0.01　0.03　0.12　0.33　0.57　0.83　0.98　1.00
B 中学校：　0.00　0.04　0.16　0.38　0.62　0.80　0.96　1.00

A 中学校の 4 番目と 5 番目の数　0.33　0.57　の意味するところは，20m 未満の生徒は 33 %，25m 未満の生徒は 57 %であるということを示す。

(1) あ．について。
　中央値は，データを小さい順に並べたとき，ちょうどまん中に位置するデータのことだから，中央値以下のデータは 50 %と考えてよい。A 中学校では 50 %点（まん中に位置するデータ）は，5 番目の階級（20m 以上 25m 未満）に属す。B 中学校でも 50 %点は，5 番目の階級に属す。したがって，あ．は正しい。

(2) い．について。
　記録が 20m 未満の生徒の割合は，A 中学校が 33 %，B 中学校が 38 %だから，A 中学校の方が小さい。したがって，い．はまちがい。

(3) う．について。
　記録が 20m 以上 25m 未満の生徒の人数は，A 中学校は，24 %だから 24 人。B 中学校も 24 %だが，人数は　$150 \times 0.24 = 36$　（人）だから，う．は正しい。人数を聞いているので注意せよ。

(4) え．について。
ここも人数を問題にしているので，B 中学校の人数の計算はまちがえないよう注意せよ。

A 中学校：　30m 以上の生徒の人数　17 人，　25m 以上 30m 未満の生徒　26 人．
B 中学校：　30m 以上の生徒の人数　30 人，　25m 以上 30m 未満の生徒　27 人．

より，え．はまちがいであることが分かる。

問 14．(1) 度数 6。中央値は，9 ℃以上 12 ℃未満の階級の 3 番目。平均値は　$m = \dfrac{322.5}{31} = 10.40.$

(2) エ（度数の合計）

(3) 2 つの度数分布多角形が同じような形で，6 時間未満の度数分布多角形よりも 6 時間以上の度数分布多角形の方が右側にある。したがって，日照時間が 6 時間以上の日は，6 時間未満の比より気温差が大きい傾向にある。